

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Факультет информационных технологий

Л. Ю. Лапушонок

**МЕХАНИКА И ЭЛЕМЕНТЫ  
СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**  
(конспект лекций)

Новосибирск  
2012

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основное содержание представленного материала составляет изложение лекций по механике и теории относительности, которые автор читал в течение ряда лет в Новосибирском государственном университете (НГУ) для студентов факультета информационных технологий (ФИТ), специализирующихся в области прикладной информатики.

Основной подход к изложению принципиальных вопросов физики на протяжении всех лет менялся мало. Однако с каждым годом курс обновлялся включением новых вопросов частного порядка, а также связанных с принципиально новыми результатами экспериментальной физики, бурно развивающейся в последние десятилетия. Многие ранее рассматривавшиеся вопросы при этом исключались. Делалось это не по принципиальным соображениям, а из-за недостатка времени.

Главное внимание обращается на выяснение физического смысла и содержания основных положений и понятий физики. В первой части лекций (лекции 1-9) дано систематическое изложение физических основ классической нерелятивистской механики.

Однако излагать физические основы механики без связи с основными идеями специальной теории относительности невозможно. Без этого нельзя установить границы применимости классической нерелятивистской механики. Изложению основных идей и положений, а также вытекающим из них наиболее значимых результатов, посвящены остальные лекции.

Автор счел возможным данный печатный вариант конспекта лекций дополнить Приложениями I и II, посвященными вопросам инвариантности и ковариантности физических соотношений, а также вопросам выбора систем единиц и связанным с этим понятием размерности. Как правило, эти вопросы в лекциях опускаются, или о них упоминается вскользь. Наиболее продвинутым и интересующимся студентам этот материал несомненно будет полезен.

Автор надеется, что предлагаемый материал, как вспомогательный, может оказать пользу студентам, а также и преподавателям при проведении семинарских занятий. Более подробно с изложенным в лекциях материалом можно ознакомиться по учебному пособию<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Л. Ю. Лапушонок, Основы классической механики, НГУ, 2007.

# Глава 1

## КИНЕМАТИКА

### ЛЕКЦИЯ 1

#### 1.1. Пространственные координаты и время. Системы отсчета

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без выяснения причин как возникновения, так и изменения движения<sup>1</sup>.

Простейшим объектом в механике является *материальная точка* (частица), под которой понимается макроскопическое тело, размерами которого при заданных условиях можно пренебречь. Можно или нельзя при изучении какого-либо движения принять тело за материальную точку – зависит от характера движения и вопросов, на которые требуется получить ответ. Например, при рассмотрении орбитального движения Земли последнюю с очень большой точностью можно считать частицей (материальной точкой). Такая идеализация сильно упрощает задачу, сохраняя все существенные моменты движения. Однако ясно что такая идеализация не годится при рассмотрении вращения Земли вокруг собственной оси

Для того чтобы определить *пространственное положение* частицы относительно какого-либо тела требуется провести три измере-

---

<sup>1</sup> Т. е. без учета массы тел и действующих на них сил.

ния и указать три числа, например, долготу, широту и высоту над поверхностью Земли. Это утверждение отнюдь не тривиально, кратко его выражают словами "физическое пространство трехмерно".

Три числа, однозначно фиксирующие относительное положение частицы в пространстве, называются *пространственными координатами*.

Рене Декарт (1596 –1650) для описания положения в пространстве впервые предложил прямоугольную систему координат, положив начало современному пониманию трехмерности физического пространства. Положение тел можно определять, пользуясь произвольной криволинейной координатной системой. Однако наиболее употребительными являются прямоугольная декартова, полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат.

Математически можно представить пространство с числом измерений, большим или меньшим трех. В работах крупнейшего математика прошлого столетия Гильберта показано, как построить геометрию в пространствах с любым (даже несчетным) числом измерений. Пока остается загадкой, почему природа выбрала пространство именно трех измерений.

Имея дело с перемещениями объектов в пространстве, физика оперирует такими понятиями, как расстояние, скорость, координаты. Для вычисления этих и других величин используются известные формулы геометрии Евклида, построенной на некоторых изначальных постулатах.

Евклидово ли известное нам пространство? Для физики это вопрос принципиальный. Евклидово пространство "плоское" в том смысле, что сумма углов треугольника, построенного в этом пространстве, такая же, что и на плоскости, и составляет  $180^\circ$ . Сумма же углов треугольников в искривленном пространстве (например, построенных на поверхности сферы) отличается от  $180^\circ$ . Каким же является наше пространство – "плоским" или "искривленным"?

Впервые поставил этот вопрос математик Ф. Гаусс. По его иници-

ативе были произведены замеры углов треугольника, построенного по вершинам трех гор в Германии. Наибольшая сторона треугольника имела длину около 100 км. Эти и последующие, более точные, измерения показали, что в пределах точности измерения наше пространство евклидово.

Оценки кривизны Вселенной продолжают проводиться. Укажем, что чем больше радиус кривизны, тем ближе пространство к "плоскому"; радиус кривизны последнего равен бесконечности. Подводя итог всем исследованиям, можно утверждать, что радиус кривизны мирового пространства не меньше, чем размер Вселенной ( $\sim 10^{28}$  см). О больших размерах судить трудно из-за их недоступности.

Что же касается малых расстояний порядка размеров атома ( $\sim 10^{-8}$  см) или размеров атомного ядра ( $\sim 10^{-12}$  см), то вопрос состоит в том, можно ли создать теорию, описывающую "атомный мир" не выходя за пределы евклидовой геометрии. Каких-либо противоречий пока не встречалось.

Для описания движений и вообще любых явлений, протекающих во времени, одних пространственных координат недостаточно. Необходима еще одна физическая величина – время. Похоже, что подходящего определения понятия "время" не существует. Физические и энциклопедические словари говорят об измерениях времени, не определяя сам термин. Знаменитый американский физик Р. Фейнман в своих лекциях сообщает, что в толковом словаре Вебстера "время" определяется как "период", а "период" – через "время". Следует признать, что время – одно из понятий, которое невозможно определить через другие понятия.

Временное измерение имеет фундаментальное качественное отличие от пространственных измерений. Если один наблюдатель приходит к заключению, что событие А в некоторой точке пространства предшествует событию В *в той же точке*, то невозможно найти наблюдателя, который воспринял бы события в обратной последо-

вательности. Никакой "поворот на  $180^\circ$ " нельзя осуществить реально по отношению к оси времени. Время имеет "выделенное" направление, и найти удовлетворительное объяснение этому пока не удалось.

Под часами в широком смысле слова будем подразумевать некоторое тело (систему тел), связанное с каким-либо периодическим процессом, служащим для измерения времени (точнее, для измерения промежутков времени).

*Система отсчета* – это совокупность системы координат и набора часов, размещенных достаточно часто в разных точках координатной системы. Тогда каждое событие можно охарактеризовать местом (координатами), где оно произошло, и временем происшествия. Чтобы описание событий было достаточно простым и обозримым, необходимо в выбранной системе отсчета пользоваться единым временем, т. е. необходимо чтобы все часы выбранной системы отсчета показывали "одинаковое время". Для этого требуется синхронизация часов, установленных в разных точках пространства.

На первый взгляд здесь нет проблем. Надо все часы собрать в одном месте, установить на них одинаковое время, а затем разнести по разным точкам пространства<sup>2</sup>. Но этот способ не проходит: имеются серьезные теоретические и опытные основания полагать, что показания таким образом синхронизированных часов *будут зависеть от способа их доставки в другие точки системы*. Иначе говоря, синхронизация, связанная с последующим переносом часов, не годится.

Если же часы не переносить, то их надо синхронизировать при помощи каких-либо сигналов, например электромагнитных. Установив часы, скажем, в точке  $A$ , можно в какой-либо момент времени  $t_A$  послать сигнал в точку  $B$ . В момент прихода сигнала часы в точке  $B$  надо установить так, чтобы они показывали время  $t_A + \tau_{AB}$ , где  $\tau_{AB}$  – время прохождения расстояния от  $A$  до  $B$ . Но  $\tau_{AB}$  можно измерить лишь после того, как часы в точках  $A$  и  $B$  будут синхро-

---

<sup>2</sup> Подразумевается, что все часы имеют одинаковую скорость хода в неподвижном состоянии.

низированы.

Преодолеть это затруднение можно, только дав четкое определение понятия одновременности для пространственно разнесенных событий. Законы природы, разумеется, не могут зависеть от каких-либо определений. Однако определения непосредственно влияют на математическую форму законов, и надо стремиться к тому, чтобы эта форма была наиболее компактна и обозрима. Разумеется, что при этом как само определение, так и все вытекающие из него следствия должны быть логически согласованы и непротиворечивы. Очевидно, что вопрос об одновременности пространственно разделенных событий эквивалентен вопросу о синхронизации пространственно разделенных часов.

Эйнштейн предложил принять положение, согласно которому в любой системе отсчета время распространения светового сигнала в вакууме от точки  $A$  до точки  $B$  равно времени распространения такого же сигнала от точки  $B$  до точки  $A$ , т. е.  $\tau_{AB} = \tau_{BA} = \tau$ . Теперь, организовав отражение сигнала в точке  $B$ , время прохождения сигнала можно предварительно измерить, используя лишь часы в точке  $A$ . После этого установить  $t_B = t_A + \tau$ . Для бесконечно быстрых сигналов  $\tau = 0$  и, следовательно,  $t_B = t_A$ . Одновременность, устанавливаемая с помощью таких сигналов, будет абсолютной. Именно такое понимание одновременности существовало в дорелятивистской физике. Но сигналов, распространяющихся с бесконечно большой скоростью, не существует.

Как будет видно в дальнейшем, одновременность пространственно разделенных событий, понимаемая в соответствии с определением Эйнштейна, является понятием относительным, т. е. события, одновременные в некоторой системе отсчета, строго говоря, не являются таковыми в других системах отсчета. Также относительным становится и понятие длины. Относительность этих понятий является следствием конечности скорости распространения любого сигнала.

## 1.2. Скорость, ускорение, криволинейное движение

Далее мы будем пользоваться преимущественно векторной системой обозначений. *Вектором называется количественная характеристика, имеющая не только числовое значение, но и направление.*

Векторная система обозначений имеет два существенных преимущества:

– формулировки физических законов в векторной форме *не зависят от выбора системы координат*; они имеют физическое содержание даже без введения системы координат;

– векторная система обозначений является *компактной*; физические законы выражаются в обозримой форме, которая подчас не сохраняется при выражении их через проекции в какой-либо системе координат.

В тексте векторные величины будут выделяться жирным шрифтом.

Прямоугольными координатами вектора  $\mathbf{a}$  называют его алгебраические проекции  $a_x, a_y, a_z$  на оси координат, записывая  $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ , или  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ .

*Радиус-вектором* ( $\mathbf{r}$ ) какой-либо точки называют вектор, идущий от некоторого выбранного начала  $O$  к этой точке. При введении какой-либо системы координат точку  $O$  обычно бывает удобно совместить с началом координатной системы. Тогда, например, при выборе декартовой системы координат  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Кривую, по которой перемещается конец радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$ , называют *траекторией движения* данной точки.

Наличие системы отсчета позволяет путем измерения координат движущейся точки в различные моменты времени получить зависимости  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , или в векторной форме  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , называемые *кинематическими уравнениями движения*.

Мгновенная скорость частицы (скорость в рассматриваемый мо-



мент времени  $t$ ) определяется как

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.2.1)$$

Здесь и далее производную по времени какой-либо переменной будем обозначать в виде переменной с точкой над ней.

Скорость является векторной величиной, модуль которой  $v = |\mathbf{v}|$  называется абсолютной величиной скорости, или просто скоростью, если из контекста ясно, о какой величине идет речь. Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения. Длина пути ( $S$ ), пройденного частицей за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , определяется интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt. \quad (1.2.2)$$

Скорость частицы во время движения может меняться. Величину

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt \quad (1.2.3)$$

называют мгновенным ускорением (ускорением). Ускорение, по определению, также является вектором. В частном случае  $\mathbf{a} = \text{const}$  (вектор  $\mathbf{a}$  не изменяется как по величине, так и по направлению) последовательное интегрирование выражений (3) и (1) дает

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2. \quad (1.2.4)$$

Для задач, связанных с криволинейным движением, весьма конструктивным является представление ускорения в виде двух векторных составляющих  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$ , одна из которых ( $\mathbf{a}_\tau$ ) направлена по касательной к траектории движения (тангенциальное у[скорение), а другая ( $\mathbf{a}_n$ ) – по нормали к траектории в направлении к центру ее кривизны (нормальное, или центростремительное ускорение).

Отметим, что если речь идет о движении тела, всегда подразумевается определенная система отсчета; только в этом случае значения скорости и ускорения имеют смысл.

Рассмотрим сначала достаточно простой случай движения частицы по окружности радиуса  $R$  (рис. 1). Траектория движения частицы в данном случае будет лежать в одной плоскости. Начало декартовой системы координат поместим в центре окружности. Координаты частицы представим в виде  $x = R \cos \varphi(t)$ ,  $y = R \sin \varphi(t)$ .

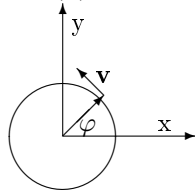


Рис. 1

Радиус-вектор положения частицы

$$\mathbf{r} = (x, y) = R(\cos \varphi, \sin \varphi), \quad |\mathbf{r}(t)| = R.$$

Выражение для скорости частицы примет вид

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = R\dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi), \quad v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R |\dot{\varphi}|. \quad (1.2.5)$$

Видим, что вектор скорости при движении по окружности ортогонален радиус-вектору:  $\mathbf{r}\mathbf{v} = xv_x + yv_y = 0$ .

Угловой скоростью (вектором угловой скорости)  $\boldsymbol{\omega}$  называется вектор, направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против часовой стрелки ("правило буравчика"). Величина  $\omega = |\dot{\varphi}|$  называется модулем (величиной) угловой скорости.

Абсолютная и угловая скорости связаны соотношениями

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad |\mathbf{v}| = v = \omega r.$$

Ускорение

$$\mathbf{a} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y) = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) - R\dot{\varphi}^2(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (1.2.6)$$

можно представить в виде суммы двух ортогональных векторов  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$ .

Первый из них, называемый *тангенциальным* ускорением

$$\mathbf{a}_\tau = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \mathbf{v} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad |\mathbf{a}_\tau| = R |\ddot{\varphi}| = \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad (1.2.7)$$

определяет изменение абсолютной величины (модуля) вектора скорости и направлен вдоль вектора  $\mathbf{v}$  при  $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi} > 0$  или против него при  $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi} < 0$ .

Второй, называемый *нормальным*, или центростремительным ускорением

$$\mathbf{a}_n = -R\dot{\varphi}^2(\cos \varphi, \sin \varphi) = -\dot{\varphi}^2 \mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad a_n = R\dot{\varphi}^2 = v^2/R, \quad (1.2.8)$$

направлен противоположно направлению радиус-вектора к центру окружности и потому ортогонален вектору скорости:

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v} = 0 \quad | \mathbf{a}_n | = | \mathbf{v} \times \mathbf{a} | / v.$$

Можно сказать, что  $\mathbf{a}_n$  "заведует" поворотом вектора скорости, в то время как  $\mathbf{a}_\tau$  "заведует" изменением его величины. При  $\mathbf{a}_\tau = 0$  угловое ускорение  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$  отсутствует ( $\ddot{\varphi} = 0$ ) и вектор  $\mathbf{v}$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , оставаясь неизменным по абсолютной величине  $v = R\omega$ .

В общем случае криволинейного движения, когда траектория является произвольной гладкой кривой, всегда можно провести окружность через три близких точки траектории  $\mathbf{r}(t - \Delta t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ . При малых  $\Delta t$  движение частицы по траектории не будет отличаться от движения по указанной окружности. Радиус  $R$  построенной таким образом окружности называется радиусом кривизны кривой (траектории) в рассматриваемой точке  $\mathbf{r}(t)$ . Соотношения (5)–(8) остаются справедливыми и для общего случая криволинейного движения, где под  $R$  надо понимать значение радиуса кривизны траектории в рассматриваемой точке. Радиус кривизны можно найти следующим образом:

$$| \mathbf{a}_n | = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v} = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}^2)^3}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^2}}.$$

В координатной форме (декартовы координаты)

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}{\sqrt{(\dot{y} \cdot \ddot{z} - \dot{z} \cdot \ddot{y})^2 + (\dot{z} \cdot \ddot{x} - \dot{x} \cdot \ddot{z})^2 + (\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x})^2}}. \quad (1.2.9)$$

При движении по плоской траектории  $z = 0$  вместо (9) будем иметь

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}.$$

При явном задании траектории  $y = f(x)$  (плоский случай)

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

где  $y' = \frac{dy}{dx}$  и  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$  – первая и вторая производные  $y$  по  $x$ .

Если плоская линия задана параметрически, т. е.  $x = f_1(\varphi)$  и  $y = f_2(\varphi)$ , то

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|},$$

где штрихи означают дифференцирование по параметру  $\varphi$ .

## ЛЕКЦИЯ 2

### 1.3. Инерциальные системы. Принцип относительности. Преобразования Галилея

*Свободным* называется тело, настолько удаленное от других тел, что их влиянием на движение тела можно пренебречь. Система отсчета, связанная с набором покоящихся друг относительно друга свободных тел, называется *инерциальной*.

Обобщением опытных фактов является *закон инерции Галилея*: свободное (т. е. не подверженное никаким внешним воздействиям) тело по отношению к любой инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно (это утверждение является также *первым законом Ньютона*). Такое движение называется свободным или *движением по инерции*.

Свободных тел, строго говоря, не существует. Предполагается, что можно в принципе добиться того, что влияние внешних условий на тело будет крайне ничтожно или каким-либо образом скомпенсировано. **Утверждение о существовании в принципе систем отсчета, по отношению к которым свободное движение тела происходит равномерно и прямолинейно, является одним из основных положений физики.**

С высокой степенью точности, как показывает опыт, инерциальной можно полагать гелиоцентрическую систему отсчета, начало координат которой жестко связано с Солнцем, а координатные оси направлены на столь удаленные тела ("далекие звезды"), что в течение достаточно большого времени можно считать их покоящимися относительно выбранного начала координат. Для многих явлений можно с большой точностью считать инерциальной и систему отсчета, начало координат которой жестко связано с Землей, а координатные оси ориентированы на "далекие звезды".

Все инерциальные системы отсчета (класс инерциальных систем отсчета) могут быть получены из какой-либо одной путем следую-

щих возможных преобразований в трехмерном пространстве: сдвига начала координат или начала отсчета времени; поворота осей координат; перехода к системе отсчета, движущейся с произвольной постоянной скоростью относительно первоначальной. Любые из названных преобразований могут быть выполнены последовательно в произвольном порядке; при этом мы получаем все возможные инерциальные системы отсчета.

*Инерциальные системы являются выделенными из всех возможных систем отсчета и играют важную роль в современной физике. Еще Галилеем был осознан следующий фундаментальный факт: два опыта, поставленных одинаковым образом при одинаковых внешних условиях в разных инерциальных системах отсчета, дают один и тот же результат.* Это утверждение составляет содержание *принципа относительности* (Галилей, Пуанкаре, Эйнштейн): *все инерциальные системы равноправны в том смысле, что законы природы имеют в них одинаковый вид*<sup>3</sup>.

Равноправность всех инерциальных систем отсчета является отражением глубоких свойств пространства-времени – его *однородности и изотропности*, понимаемых как отсутствие в пространстве-времени каких-либо выделенных точек или направлений, которые могли бы быть установлены опытным путем (см. подробнее в конце данной лекции).

Опираясь на принцип относительности, выясним, изменяются ли линейные размеры, если измерения проводить из разных инерциальных систем отсчета.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$  и пусть  $K'$ -система движется относительно  $K$ -системы с произвольной постоянной скоростью  $V$ .

Представим, что имеются два тонких одинаковых (по предварительным измерениям в какой-либо системе отсчета) обруча. Пусть

---

<sup>3</sup> Принцип относительности Галилея связывают с рассмотрением механических явлений; распространение его на все без исключения физические явления связывают с именами Эйнштейна и Пуанкаре.

теперь один обруч закреплен в  $K$ , а другой – в  $K'$ -системе. Плоскости обручей перпендикулярны к вектору  $\mathbf{V}$ , и обручи закреплены соосно в таких положениях, что если движение влияет по-разному на их поперечные размеры, то один из обручей в процессе движения пройдет внутри другого. Описанная операция дает объективный физический способ однозначной регистрации (из любой системы отсчета) изменения поперечных размеров и установления того обруча, поперечные размеры которого окажутся меньше (больше), чем у другого.

В соответствии с принципом относительности обруч с бóльшим диаметром для наблюдателя системы  $K$  будет иметь меньший диаметр для наблюдателя системы  $K'$ . И если один из обручей пройдет внутри другого, то для одного из наблюдателей бóльший обруч пройдет внутри меньшего. Один из наблюдателей будет прав, другой – неправ. И можно будет установить, какая из инерциальных систем отсчета "правильная", а какая "неправильная". Принцип относительности будет нарушен.

Следовательно, *размеры любого тела, поперечные к относительной скорости систем  $K$  и  $K'$ , по измерениям из этих систем отсчета, должны быть одинаковы.* Подчеркнем, что данное заключение справедливо при любых значениях относительной скорости  $\mathbf{V}$  систем  $K$  и  $K'$ , так как мы не делали каких-либо предположений о ее величине.

Перейдем теперь к продольным размерам. Сделаем предположение, что время имеет абсолютный характер, т. е. что относительное движение систем  $K$  и  $K'$  никак не влияет на разность показаний любой пары из покоящихся в этих системах часов. Другими словами, предположение заключается в том, что для каждого из наблюдателей обеих систем показания собственных часов и часов другой системы будут всегда совпадать, и, употребляя выражения "момент времени" или "одновременно", мы будем полагать, что для всех наблюдателей, в какой бы системе отсчета они ни находились, в "этот

момент" выполняется равенство  $t = t'$ .

Выберем теперь два стержня одинаковой длины (по предварительным измерениям в какой-либо системе). Пусть один из стержней неподвижен относительно системы  $K$  и расположен параллельно оси  $X$ . Другой стержень движется вместе с системой  $K'$ , располагаясь параллельно оси  $X'$ . Направления осей  $X$  и  $X'$  совпадают. Оба стержня расположены так, что во время движения должны пройти в непосредственной близости друг от друга. Обозначим концы стержня, покоящегося в системе  $K$  ( $K'$ ), буквами  $A, B$  ( $A', B'$ ). Пусть вначале встречаются концы  $A$  и  $A'$ . Когда поравняются концы  $A'$  и  $B$  наблюдатели обеих систем в этот же момент времени, одинаковый по предположению для обеих систем, зафиксируют (однозначно из любой системы отсчета) сокращение или увеличение длины одного из стержней. Повторяя предыдущие рассуждения, касающиеся поперечных размеров, мы приходим к заключению, что *в том случае, если время имеет абсолютный характер, следствием принципа относительности будет сохранение всех размеров тела при их измерениях в разных инерциальных системах отсчета.*

Сразу же подчеркнем, что между заключениями о неизменности поперечных размеров и неизменности продольных размеров есть одна крайне принципиальная разница. При выводе заключения о неизменности поперечных размеров время никак не фигурировало. При выводе же заключения о равенстве продольных размеров было принято допущение об абсолютном характере времени. Это существенно, так как в противном случае измерение координат пространственно разнесенных концов движущегося стержня, проведенное наблюдателями в один и тот же момент времени по часам их системы отсчета, окажется проведенным в разные моменты времени по часам наблюдателей, относительно которых стержень покоится. И тогда не будет ничего удивительного в том, если наблюдателями из разных систем отсчета будут фиксироваться разные продоль-



ные размеры<sup>4</sup>. Другими словами, измерения координат концов движущегося стержня, проводимые одновременно по часам какой-либо системы отсчета, будут восприниматься наблюдателями системы отсчета, движущейся относительно первой, как проводимые в разные моменты времени.

Предположение об абсолютном характере времени лежит в основе так называемых **преобразований Галилея**.

Пусть  $K$  – некоторая инерциальная система отсчета и  $K'$  – система отсчета, движущаяся относительно  $K$ -системы с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$ . Пусть также в момент  $t = t' = 0$  начала систем отсчета совпадают. В предположении об абсолютном характере времени все размеры, как показано выше, сохраняют свои значения.

В этом случае получаем очевидные равенства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t' = t, \quad (1.3.1)$$

именуемые *преобразованиями Галилея*.

Дифференцируя соотношения (1) по времени, получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (1.3.2)$$

– *нерелятивистский закон преобразования скоростей*.

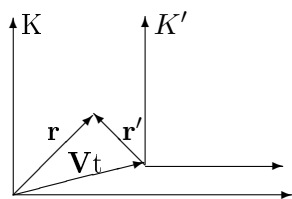


Рис. 2

Дифференцируя по времени соотношения (2), получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (1.3.3)$$

*Ускорение частицы одинаково в любой инерциальной системе отсчета.*

Сдвигом начала координат и поворотом осей всегда можно добиться того, чтобы в выбранный момент времени (с которого и будем начинать отсчет, положив  $t = t' = 0$ ) начала координат обеих систем

<sup>4</sup> Далее будет показано, что равенство  $t = t'$  достаточно точно выполняется лишь в тех случаях, когда  $V \ll c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

и соответствующие оси совпадали. Тогда в декартовых координатах соотношения (1–3) примут вид

$$\begin{aligned}x &= x' + V_x t', & y &= y' + V_y t', & z &= z' + V_z t', & t' &= t ; \\v_x &= v'_x + V_x, & v_y &= v'_y + V_y, & v_z &= v'_z + V_z ; & & (1.3.4) \\a_x &= a'_x, & a_y &= a'_y, & a_z &= a'_z.\end{aligned}$$

Везде в дальнейшем будем полагать, что направления координатных осей систем  $K$  и  $K'$  совпадают и система  $K'$  движется вдоль положительного направления оси  $X(X')$  с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$  относительно системы  $K$ .

Тогда соотношения (4) упрощаются, принимая вид

$$\begin{aligned}x &= x' + V t', & y &= y', & z &= z', & t' &= t ; \\v_x &= v'_x + V, & v_y &= v'_y, & v_z &= v'_z . & & (1.3.5)\end{aligned}$$

Пусть в  $K'$ -системе частица имеет скорость  $v'$  и направлена под углом  $\varphi'$  к оси  $OX'$ . Тогда из соотношения (5) имеем для  $K$ -системы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v' \sin \varphi'}{v' \cos \varphi' + V} = \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi' + V/v'} . \quad (1.3.6)$$

Следовательно, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой изменяются и углы между вектором скорости и координатными осями.

Соотношения Галилея кажутся очевидными с точки зрения "здорового смысла". Однако в их основании заложено положение о неизменности (абсолютности) времени для наблюдателей, связанных с разными системами отсчета. Следствием этого положения является то, что линейные размеры тел, их относительные скорости и ускорения, а также промежутки времени между событиями остаются неизменными (иначе, абсолютными или инвариантными) при описании одного и того же явления в разных инерциальных системах отсчета.

Эти представления настолько соответствуют нашему повседневному опыту, находя подтверждение в огромном количестве разнообразных явлений, что изменение их дается не без труда. В свое время далеко не все физики и не сразу приняли другое понимание физической картины мира, в котором пространственные размеры и время потеряли свою абсолютность и обособленность, оказались в тесной взаимосвязи. При этом преобразования Галилея заменяются преобразованиями Лоренца и оказываются предельным случаем последних, когда скорость  $V$  пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света в вакууме. Так как скорость света огромна ( $\approx 300000$  км/с) по сравнению с масштабom "земных" скоростей, то поправка к преобразованиям Галилея в большинстве случаев будет ничтожна. Физические же явления, проступающие лишь при скоростях, сравнимых со скоростью света, получили название *релятивистских эффектов*. Механика, опирающаяся на физическую теорию пространства и времени (специальная теория относительности), созданная А. Эйнштейном, называется *релятивистской механикой*.

## Глава 2

# НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ

### 2.1. Законы динамики Ньютона

В инерциальной системе отсчета *свободная частица* движется с постоянной скоростью  $\mathbf{v} = \text{const}$ . А если  $\mathbf{v} \neq \text{const}$  (следовательно,  $\mathbf{a} \neq 0$ ), то частица не является свободной, она испытывает воздействие других тел. *Степень этого воздействия называют силой, действующей на частицу*. Результат этого воздействия определяет второй закон Ньютона. Рассматривая второй закон Ньютона, нам придется оперировать понятиями силы и массы. При этом четкое количественное определение одного понятия предопределяет, по сути, второе.

Начнем с количественного определения силы. Степень воздействия различных тел на данное тело можно определить, сравнивая ее со степенью воздействия некоторой эталонной силы. Возьмем, например, маленькую пружинку, растянутую на определенную длину. Степень воздействия такой пружинки назовем силой  $F$ . Указав также направление воздействия, получим вектор силы  $\mathbf{F}$ . Прямую, вдоль которой направлен вектор силы, называют *линией действия силы*. Если на линии действия силы  $\mathbf{F}$  к телу прикрепить  $n$  таких же и точно так же растянутых в том же направлении пружинок, то такое воздействие будет отвечать силе  $n\mathbf{F}$ . Имея наборы всевозмож-

ных пружинок и проделывая с ними описанные операции, получаем возможность выбрать воздействие некоторого набора пружинок в качестве эталонной силы  $\mathbf{F}_0$ , а также возможность определения дробных и целых частей эталонной силы. В итоге сможем измерять произвольную силу через эталонную. Таково определение силы в рамках данного подхода.

Сравнивая воздействие различных по величине и направлению сил  $\mathbf{F}$  на одну и ту же частицу, найдем, что эти силы приводят к движению частицы с разными ускорениями, причем

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{a}.$$

Утверждение о том, что *ускорение, с которым движется любая частица, пропорционально действующей на нее силе*, является обобщением экспериментальных данных и составляет содержание **второго закона Ньютона**<sup>1</sup>. Отсюда следует, что отношение  $|\mathbf{F}|/|\mathbf{a}|$  не зависит ни от силы, ни от ускорения или скорости частицы, а является *характерной для каждой данной частицы величиной, которую называют массой*. Обозначив эту характеристику частицы через  $m$ , можем записать

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.1.1.)$$

Масса выступает здесь как *мера инерции* – мера способности тела противиться воздействиям по изменению его состояния.

Сила – *результат взаимодействия материальных объектов*. Это значит, что если сила  $\mathbf{F}_{ik} = m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ , действующая на частицу  $i$  при ее взаимодействии с частицей  $k$  не равна нулю, то не равна нулю также сила  $\mathbf{F}_{ki} = m_k\ddot{\mathbf{r}}_k$  вследствие взаимодействия частицы  $k$  с частицей  $i$ .

Обобщением экспериментальных данных является и **третий закон Ньютона**: *при взаимодействии двух частиц (частицы  $i$  и*

---

<sup>1</sup> Утверждение справедливо при  $V \ll c$ .

частицы  $k$ ) имеет место равенство сил действия и противодействия, направленных по одной и той же прямой:

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki} . \quad (2.1.2)$$

Данное утверждение является новым постулатом. Оно никак не следует из предыдущих положений.

Пусть частица взаимодействует с несколькими материальными объектами  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . Каждый из них, будь он один, обусловил бы возникновение силы  $F_1, F_2, \dots, F_k$  соответственно. В классической механике постулируется *принцип (закон) независимости действия сил*: сила, обусловленная каким-либо источником, не зависит от наличия сил, обусловленных другими источниками. *Центральным* при этом является предположение о том, что *силы, приложенные к одной и той же частице, могут складываться по обычным правилам сложения векторов и что полученная таким образом сила по своему действию на частицу эквивалентна воздействию всех исходных сил*. Это положение воспринимается обычно как нечто само собой разумеющееся. Однако оно не может быть получено как следствие каких-либо логических умозаключений, вытекающее из других установленных положений, а должно рассматриваться как экспериментально установленный факт.

Удобно делить все силы на два класса. Силы, возникающие из-за взаимодействия частиц, входящих в рассматриваемую систему, называют *внутренними*. Силы, воздействующие на частицы системы со стороны материальных объектов, не включенных в систему, называют *внешними*. Если в системе внешние силы отсутствуют, или ими можно по условиям задачи пренебречь, то такие системы называют *замкнутыми*.

Тогда уравнения движения для замкнутой системы из  $N$  частиц запишутся в виде

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i}^N \mathbf{F}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1.3)$$

## 2.2. Взаимодействие на расстоянии. Полевое взаимодействие

Согласно представлениям механики Ньютона, силы, действующие на всякое тело в какой-либо момент времени, зависят от положений и скоростей остальных тел в тот же момент времени. Ньютонская механика принципиально допускала либо непосредственное действие на расстоянии (теория дальнего действия), либо взаимодействия, передающиеся с бесконечно большой скоростью.

Экспериментальные факты привели к заключению, что скорость распространения любых взаимодействий ограничена предельно возможной скоростью (скоростью света в пустоте).

Современная физика не признает непосредственного действия на расстоянии. Согласно современным воззрениям, всякое тело возбуждает в окружающем пространстве некоторое силовое поле или поля (гравитационные, электромагнитные и прочие), которые проявляются для других тел в виде действующих на них сил. Никаких других силовых взаимодействий, кроме полевых, современная физика не признает. Взаимодействия прикосновением являются частным случаем полевого взаимодействия, когда они обусловлены электромагнитными молекулярными полями. Последние очень резко убывают с расстояниями, существенно проявляясь лишь при расстояниях порядка  $10^{-8}$  см. Такие полевые взаимодействия макроскопически воспринимаются как взаимодействия прикосновением.

Современная физика рассматривает поле как некую объективную реальность, посредством которой передаются все взаимодействия. Поле действует на тела с определенными силами, но не имеет смысла говорить о механических силах, действующих на поля. Поэтому при полевой концепции взаимодействия третий закон Ньютона может нарушаться: на тело действует сила, но нет силы противодействия, действующей на другое тело. Закон сохранения импульса, однако, остается верным, так как поля могут обладать импульсом. Например, при излучении тело теряет вместе с энергией импульс, уноси-

мый полем; при поглощении тело получает от поля импульс вместе с поглощенной энергией. Примером проявления импульса электромагнитного поля служит давление света, впервые показанное в опытах русского физика П. Н. Лебедева (1866–1912).

Поле может существовать даже независимо от возбудивших его тел: поле электромагнитного излучения продолжает существовать и после того, как перестает работать возбудивший его источник. Поле наряду с веществом является одним из видов материи.

### 2.3. Импульс. Сила как мера скорости изменения импульса.

Выражение  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$  представим в виде

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \dot{\mathbf{p}}_i .$$

Величина  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  называется *импульсом*  $i$ -й частицы. Сумму импульсов всех частиц, входящих в систему  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ , называют *импульсом (полным импульсом) системы*.

Если система не является замкнутой, то в правые части уравнений (2.1.3) необходимо ввести *внешние силы* (силы со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему). Уравнения движения системы примут вид

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{k \neq i}^N \mathbf{F}_{ik} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}^{\text{вн}}, \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3.1)$$

где  $\sum_j \mathbf{F}_{ij}^{\text{вн}}$  – сумма внешних сил, действующих на  $i$ -ю частицу.

Сложив уравнения (1), получим

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \sum_{k \neq i}^N \mathbf{F}_{ik} + \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij}^{\text{вн}}, \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3.2)$$

Из принципа независимости действия сил, предположения о том, что взаимодействия частиц сводятся к силам попарного взаимодействия, и третьего закона Ньютона следует *равенство нулю суммы*



всех внутренних сил:

$$\sum_i \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} = 0.$$

Сумму всех внешних сил в соотношении (2) обозначим  $\mathbf{F}_{\text{вн}}$ . Вместо соотношения (2) окончательно получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{p}_i = \mathbf{F}_{\text{вн}}. \quad (2.3.3)$$

**Производная по времени от полного импульса системы частиц равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.** В замкнутой системе внешние силы отсутствуют и **полный импульс замкнутой системы сохраняется.**

Требование замкнутости системы для сохранения ее импульса, как это следует из соотношения (3), вообще говоря, не обязательно: *достаточным будет требование равенства нулю равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему.*

Строго говоря, и требование о попарном взаимодействии частиц может быть заменено, как это следует из соотношения (1), более слабым условием равенства нулю геометрической суммы всех внутренних сил. Возможно, и это условие не является необходимым. Закон сохранения импульса остается справедливым даже в тех случаях, когда теряет смысл разделение системы на части, и нельзя пользоваться представлениями о силах взаимодействия между ними, а также другими представлениями классической механики. Огромный опытный материал, накопленный физикой, показывает, что *закон сохранения импульса, надлежащим образом обобщенный, является фундаментальным законом природы, не знающим исключений.* Однако в таком широком понимании он уже не может рассматриваться как следствие законов Ньютона.

Вернемся к уравнению (3). Из него следует, что приращение импульса системы за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  равно  $d\mathbf{P} = \mathbf{F}_{\text{вн}} dt$ . Приращение же импульса системы за промежуток вре-

мени  $t - t_0$  определится соотношением

$$\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F}_{\text{вн}}(t) dt. \quad (2.3.4)$$

Интеграл в правой части этого равенства называется *импульсом силы*  $\mathbf{F}_{\text{вн}}$  за время  $t - t_0$ , его не следует путать с импульсом системы частиц. *Приращение импульса системы равно импульсу всех действующих на нее внешних сил.*

Помимо подхода к законам динамики, который изложен в предыдущем разделе, определенные преимущества может представлять альтернативный подход, основывающийся на законе сохранения импульса. При этом подходе первичным считается следующее обобщение опытных данных: каждой частице можно приписать определенную величину  $m_i$ , называемую массой, и что *для замкнутой системы частиц*

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{P} = \text{const}. \quad (2.3.5)$$

Величины масс  $m_i$  при этом можно определить, исследуя взаимодействие  $i$ -й частицы с некоторой частицей, масса которой  $m_0$  принята за эталонную:

$$m_i \mathbf{v}_i + m_0 \mathbf{v} = m_i \mathbf{v}'_i + m_0 \mathbf{v}' \quad \Rightarrow \quad m_i = m_0 \frac{|\mathbf{v}' - \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i|}.$$

При данном подходе изменяется определение силы. Теперь сила  $\mathbf{F}_i$ , действующая на  $i$ -ю частицу, *определяется* как производная по времени от импульса частицы:

$$\mathbf{F}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (2.3.6)$$

*Одним из фундаментальных обобщений классической механики является установление того факта, что производная импульса частицы ( $d\mathbf{p}_i/dt$ ), т. е. функция  $\mathbf{F}_i$ , зависит лишь от разностей*

координат (и, быть может, от относительных скоростей) данной частицы и частиц, с которыми она взаимодействует:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k), (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_k)), \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3.7)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, данное утверждение является достаточно сильным. Именно оно позволяет рассматривать соотношения (7) как уравнения движения. Соотношения (6)–(7) эквивалентны второму закону Ньютона. Из них следует, что для нахождения движения замкнутой системы частиц достаточно знать силы  $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  и начальные значения координат и скоростей частиц.

Из сохранения импульса замкнутой системы из двух частиц ( $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}$ ) следует

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},$$

т. е. третий закон Ньютона при этом подходе является следствием соотношений (5)–(6).

Уравнения (7) при переходе в другую инерциальную систему отсчета с использованием преобразований Галилея будут иметь точно такой же вид, как и уравнения движения в старых переменных, так как в этом случае относительные скорости и расстояния между частицами, как и интервалы времени, не изменяются<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Подробнее в Приложении Iq

## ЛЕКЦИЯ 4

### 2.4. Центр инерции и его свойства

Многие соотношения в механике приобретают удобную и компактную форму, если ввести понятие центра инерции системы. *Центром инерции системы*<sup>3</sup> называется геометрическая точка пространства, определяемая радиус-вектором ( $\mathbf{R}_c$ ):

$$\mathbf{R}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (2.4.1)$$

где  $m = \sum_i m_i$  – масса всей системы.

Координаты центра инерции в декартовой системе координат в соответствии с соотношением (1) будут определяться формулами  $x_c = \frac{1}{m} \sum m_i x_i$ ,  $y_c = \frac{1}{m} \sum m_i y_i$ ,  $z_c = \frac{1}{m} \sum m_i z_i$ .

В каждый момент времени точка, соответствующая центру инерции системы, занимает определенное положение относительно частиц системы, остающееся неизменным при переходе в другую систему отсчета<sup>4</sup>. Действительно, в соответствии с преобразованиями Галилея

$$\mathbf{R}'_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \frac{1}{m} \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{V}t) = \mathbf{R}_c - \mathbf{V}t.$$

Положения как центра инерции, так и всех частиц системы в любой момент времени будут смещены одинаково (на величину  $\mathbf{V}t$ ), т. е. положение центра инерции относительно частиц системы не изменится.

Скорость центра инерции ( $\mathbf{V}_c$ ) определится как

$$\mathbf{V}_c = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (2.4.2)$$

---

<sup>3</sup> Центр инерции системы в англоязычной литературе часто называют *центром масс*. В однородном гравитационном поле ( $\mathbf{g} = \text{const}$ ) центр инерции совпадает с центром тяжести системы  $\mathbf{R} = \sum_i m_i g \mathbf{r}_i / \sum_i m_i g$ .

<sup>4</sup> В релятивистском случае это положение нарушается.

Тогда полный импульс системы

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = m \mathbf{V}_c. \quad (2.4.3)$$

*Полный импульс (количество движения) системы равен массе системы, умноженной на скорость ее центра инерции.* В частности, в системе отсчета, с началом в центре инерции системы, полный импульс системы равен нулю.

Если система частиц замкнута, то ее полный импульс  $\mathbf{P}$ , а следовательно, и скорость центра инерции  $\mathbf{V}_c$  сохраняется. *Центр инерции замкнутых систем движется с постоянной скоростью (иногда равной нулю).*

Если же на систему частиц действуют внешние силы, сумма которых равна  $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ , то

$$\dot{\mathbf{P}} = m \dot{\mathbf{V}}_c = \mathbf{F}_{\text{внеш}}. \quad (2.4.4)$$

Соотношения (3)–(4) позволяют рассматривать поступательное движение системы частиц как движение одной частицы с массой  $m = \sum_i m_i$  (закон аддитивности масс) и скоростью  $\mathbf{V}_c$ . **Центр инерции системы частиц движется так, как двигалась бы одна частица с массой, равной массе всех частиц системы, и если бы к ней были приложены все внешние силы, действующие на частицы системы (теорема о движении центра инерции).**

При переходе в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $\mathbf{V}$  относительно исходной, полный импульс

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) = \mathbf{P} - \mathbf{V} \sum_i m_i = m(\mathbf{V}_c - \mathbf{V}).$$

Видно, что во всех системах отсчета, движущихся относительно исходной со скоростью равной скорости ее центра инерции, полный импульс системы частиц равен нулю.

Любая такая система отсчета называется *системой центра инерции*. В частности, таковой будет система отсчета, начало которой

связано с центром инерции системы частиц. Во многих задачах, связанных со взаимодействием частиц, переход в систему центра инерции существенно упрощает решение.

## 2.5. Моменты импульса и силы. Изменение момента импульса

Введем два определения. *Момент импульса* (момент количества движения)  $i$ -й частицы относительно произвольно выбранной фиксированной точки  $O$  ( $\mathbf{l}_{io}$ ) определяется как

$$\mathbf{l}_{io} = \mathbf{r}_{io} \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{io} \times m_i \mathbf{v}_i,$$

где  $\mathbf{r}_{io}$  – радиус-вектор частицы, проведенный из точки  $O$ . Вектор

$$\mathbf{L}_o = \sum_i (\mathbf{r}_{io} \times \mathbf{p}_i)$$

называется *моментом импульса* (количества движения) системы относительно точки  $O$ .

*Моментом силы*  $\mathbf{F}_i$  относительно произвольно выбранной точки  $O$  назовем вектор

$$\mathbf{n}_{io} = \mathbf{r}_{io} \times \mathbf{F}_i; \quad |\mathbf{n}_{io}| = |r_{io} F_i \sin \alpha_i| = |F_i \rho_{io}|,$$

где  $r_{io}$  – радиус-вектор из точки  $O$  к точке приложения силы,  $\alpha_i$  – угол между радиус-вектором и направлением силы,  $\rho_{io}$  – расстояние от точки  $O$  до линии действия силы ("плечо" силы). Сумма

$$\mathbf{N}_o = \sum_i (\mathbf{r}_{io} \times \mathbf{F}_i)$$

называется *моментом (вращательным моментом) сил* относительно выбранной точки  $O$ . Внутренние силы взаимодействия частиц системы не дают вклада в момент сил (внутренние силы, согласно третьему закону Ньютона, попарно равны и противоположно направлены вдоль одной и той же прямой).

Как момент импульса, так и момент силы изменяются при смене точки, относительно которой они вычисляются. Пусть точка  $A$  смещена относительно точки  $O$  на вектор  $\mathbf{R}_{oa}$  и  $\mathbf{r}_{ia}$  – радиус-вектор, соединяющий т.  $A$  с  $i$ -ой частицей. Тогда  $\mathbf{r}_{io} = \mathbf{r}_{ia} + \mathbf{R}_{oa}$  и моменты импульса системы относительно фиксированных точек  $O$  и  $A$  будут связаны соотношением

$$\mathbf{L}_o = \sum_i (\mathbf{r}_{io} \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_{ia} + \mathbf{R}_{oa}) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{L}_a + \mathbf{R}_{oa} \times \mathbf{P}, \quad (2.5.1)$$

где  $\mathbf{P}$  – полный импульс системы.

Аналогично

$$\mathbf{N}_o = \mathbf{N}_a + \mathbf{R}_{oa} \times \mathbf{F}, \quad (2.5.2)$$

где  $\mathbf{F}$  – равнодействующая внешних сил, действующих на систему.

Рассмотрим изменение момента импульса системы частиц  $\mathbf{L}_a$  во времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_a}{dt} &= \sum_i \left( \mathbf{r}_{ia} \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right) + \sum_i \left( \frac{d\mathbf{r}_{ia}}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i \right) = \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_{ia} \times \mathbf{F}_i) + \sum_i (\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_{ia} \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{N}_a. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Окончательно имеем

$$\frac{d\mathbf{L}_a}{dt} = \mathbf{N}_a. \quad (2.5.4)$$

**Скорость изменения момента импульса системы равна моменту внешних сил, действующих на систему.** В частности, момент импульса замкнутой системы относительно фиксированной точки остается постоянным.

Если же частица находится в *поле центральной силы* ( $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}/r$ ), то момент силы (относительно центра поля), действующий на частицу, выражается как  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ . Следовательно, момент импульса частицы, движущейся в поле центральных сил, сохраняет постоянное значение относительно центра.

Преыдущие результаты мы получили, полагая, что точки, относительно которых рассматриваются моменты импульса и внешних сил, неподвижны в выбранной системе отсчета. Посмотрим, как изменяются выведенные формулы, когда одна или обе точки ( $O$  и  $A$ ) движутся. Условимся при определении моментов  $\mathbf{L}_o$  и  $\mathbf{L}_a$  скорости всех точек системы брать относительно какой-то одной инерциальной системы отсчета  $K$ , которую мы будем считать неподвижной. Таким образом мы определяем моменты  $\mathbf{L}_o$  и  $\mathbf{L}_a$  выражениями

$$\mathbf{L}_o = \sum (\mathbf{r}_{oi} \times m_i \mathbf{v}_i), \quad \mathbf{L}_a = \sum (\mathbf{r}_{ai} \times m_i \mathbf{v}_i),$$

в которых, по определению,  $\mathbf{v}_i$  означает одну и ту же скорость  $i$ -й материальной точки относительно системы  $K$

Допустим теперь, что точка  $O$  неподвижна. Тогда из формулы (2) следует  $\dot{\mathbf{L}}_o = \mathbf{N}_o = \mathbf{N}_a + \mathbf{R}_{oa} \times \mathbf{F}$ . Дифференцируя по времени формулу (1), получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_a &= \dot{\mathbf{L}}_o - \dot{\mathbf{R}}_{oa} \times \mathbf{P} - \mathbf{R}_{oa} \times \dot{\mathbf{P}} = \\ &= \mathbf{N}_a + \mathbf{R}_{oa} \times \mathbf{F} - \dot{\mathbf{R}}_{oa} \times \mathbf{P} - \mathbf{R}_{oa} \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

Окончательно

$$\dot{\mathbf{L}}_a = \mathbf{N}_a - \dot{\mathbf{R}}_{oa} \times \mathbf{P}. \quad (2.5.5)$$

Этим уравнением должна быть заменена формула (4) для случая, когда точка  $A$  движется. Ему можно придать другой вид. Величина  $\dot{\mathbf{R}}_{oa} = \mathbf{V}_a$  — есть скорость точки  $A$ , а импульс  $\mathbf{P} = m\mathbf{V}_c$ . Таким образом

$$\dot{\mathbf{L}}_a = \mathbf{N}_a - m(\mathbf{V}_a \times \mathbf{V}_c).$$

Переставив порядок сомножителей в векторном произведении, окончательно получаем

$$\dot{\mathbf{L}}_a = \mathbf{N}_a + m(\mathbf{V}_c \times \mathbf{V}_a). \quad (2.5.6)$$

Соотношение (6) совпадает с соотношением (4), когда или центр инерции системы неподвижен ( $\mathbf{V}_c = 0$ ), или скорости  $\mathbf{V}_a$  и  $\mathbf{V}_c$  коллинеарны (в частности, если точка  $A$  совпадает с центром инерции



системы). Если движущаяся точка  $A$  совпадает с центром масс (центром инерции) системы, то формула (6) переходит в прежнее уравнение (4). *Уравнение моментов относительно центра масс имеет такой же вид, что и относительно неподвижной точки.*

Постоянство момента импульса системы не является "привилегией" лишь замкнутых систем. Из соотношения (4) следует, что момент импульса системы относительно произвольной фиксированной точки сохраняется, если момент внешних сил относительно этой точки равен нулю (закон сохранения момента импульса системы).

Во многих задачах бывает удобно рассматривать момент импульса системы относительно центра инерции. Пусть в некоторый момент времени  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_{ic}$  – радиус-векторы  $i$ -й частицы системы относительно произвольно выбранной точки  $A$  и относительно центра инерции соответственно,  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $A$  в центр инерции. Тогда  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{ic} = \mathbf{R}$ , и момент импульса относительно точки можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i [(\mathbf{r}_{ic} + \mathbf{R}) \times \mathbf{p}_i] = \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_{ic} \times \mathbf{p}_i) + \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{L}_c + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_c + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \quad (2.5.7)$$

*Момент импульса системы частиц относительно произвольной точки равен моменту импульса относительно центра инерции системы плюс момент импульса центра инерции с сосредоточенной в нем массой системы.*

Момент импульса одной частицы относительно собственного центра инерции называется *спином частицы*.

Пусть изменение радиус-вектора частицы за время  $dt$  равно  $d\mathbf{r}$ . Величина вектора  $\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$  численно равна площади треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}$ . Вектор

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$$

называется *секториальной скоростью*, его абсолютная величина численно равна площади, "заметаемой" радиус-вектором движущейся частицы в единицу времени, а направление ортогонально плоскости движения частицы. Свяжем секториальную скорость частицы с моментом ее импульса:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{\mathbf{r} \times m\mathbf{v}}{2m} = \frac{\mathbf{L}}{2m}. \quad (2.5.8)$$

Если при движении у частицы сохраняется момент импульса, т. е.  $\mathbf{L} = \text{const}$  (например, при движении частицы в поле центральной силы), то, во-первых, движение частицы происходит в одной плоскости (вектор  $\mathbf{L}$  сохраняет не только свое значение, но и направление) и, во-вторых, секториальная скорость частицы постоянна (в равные отрезки времени радиус-вектор "заметает" равные площади – второй закон Кеплера).

## ЛЕКЦИЯ 5

### 2.6. Работа. Кинетическая энергия. Потенциальные силы. Потенциальная энергия

Пусть имеется некоторая система частиц. Рассмотрим какую-либо ( $i$ -ю) частицу системы, перемещающуюся вдоль некоторого пути. Пусть на частицу действует некая сила  $\mathbf{F}_i$ . *Элементарной работой* силы  $\mathbf{F}_i$  назовем величину  $dA_i = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i$ . Сумма элементарных работ всех сил, действующих на частицы системы, равна

$$dA = \sum_i dA_i.$$

Умножив на  $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$  обе части уравнения движения частицы  $m_i d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{F}_i$ , получаем

$$dA_i = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \mathbf{v}_i dt = m_i \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dK_i. \quad (2.6.1)$$

Величину  $K_i = m_i v_i^2/2$  называют *кинетической энергией*  $i$ -й частицы, тогда  $dA_i = dK_i$ . Суммируя по всем частицам системы, получим

$$dK = dA. \quad (2.6.2)$$

*Приращение кинетической энергии системы материальных частиц равно элементарной работе всех сил, приложенных к частицам (теорема об изменении кинетической энергии).*

Весьма существенно, что речь идет о *всех*, а не только о *внешних силах*. До сих пор, когда мы встречались с суммированием сил, в силу третьего закона Ньютона сумма всех внутренних сил оказывалась равной нулю и могла быть отброшена. Здесь же мы встретились с суммированием произведений  $\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i$ , и, даже если силы  $\mathbf{F}_i$  и  $\mathbf{F}_k$  равны, противоположно направлены и действуют вдоль одной прямой, сумма  $\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_k d\mathbf{r}_k$ , вообще говоря, отлична от нуля, так как в общем случае  $d\mathbf{r}_i \neq d\mathbf{r}_k$ .

Кинетическая энергия системы частиц, как это видно из ее определения, величина *аддитивная*, т. е. кинетическая энергия системы частиц равна сумме кинетических энергий отдельных частиц. Для вычисления изменения кинетической энергии системы частиц при переходе системы из одного состояния в другое необходимо вычислить изменение кинетической энергии каждой частицы, взяв для этого криволинейные интегралы вдоль траекторий движения частиц:

$$\frac{mv_{i2}^2}{2} - \frac{mv_{i1}^2}{2} = \int_{(i1)}^{(i2)} \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i dt \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.6.3)$$

Сила  $\mathbf{F}_i$  включает в себя как внешние, так и внутренние силы, действующие на  $i$ -ю точку. Эта сила в общем случае может зависеть как от координат частиц системы, так и от их скоростей и времени. Применение соотношения (3) для конкретных случаев движения системы частиц нередко является крайне трудной задачей. Это, в частности, связано с тем, что работа внутренних сил не обязательно равна нулю и не может быть вычислена в общем виде.

**Силовое поле.** Во многих задачах механики имеют дело с *силами, зависящими только от положения частиц и не зависящими от их скоростей и времени*.

Рассмотрим случай движения одной частицы, когда действующая на нее сила зависит лишь от положения частицы:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Тогда с каждой точкой пространства, определяемой в некоторой инерциальной системе отсчета, можно связать вектор, изображающий ту силу, которая действовала бы на частицу, если бы последняя находилась в этой точке пространства. Условно можно считать, что все пространство "заполнено" векторами сил. Это множество векторов называется *силовым полем*. Математически такое силовое поле определяется заданием в пространстве некоторой векторной функции  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ .

*Если работа сил поля  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  по любому замкнутому пути равна*

нулю, т. е.  $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$ , то такие силовые поля и сами силы называются потенциальными. Легко показать (покажите), что работа сил таких полей (работа потенциальных сил), совершаемая при движении частицы из положения  $\mathbf{r}_1$  в положение  $\mathbf{r}_2$ ,

$$A_{12} = \int_{(\mathbf{r}_1)}^{(\mathbf{r}_2)} \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

не зависит от вида пути и определяется лишь координатами конечной и начальной точек. При движении частицы в таких полях для нее можно ввести понятие потенциальной энергии в рассматриваемой точке ( $U(\mathbf{r})$ ), определив

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = - \int_{(\mathbf{r}_1)}^{(\mathbf{r}_2)} \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (2.6.4)$$

Отсюда имеем

$$dU = -dA. \quad (2.6.5)$$

Еще раз подчеркнем, что формуле (2) имеется в виду работа всех сил, действующих на частицы системы, тогда как в формуле (5) речь идет о работе только потенциальных сил.

Раскрыв скалярное произведение в подынтегральном выражении (4)

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = - \int_{(\mathbf{r}_1)}^{(\mathbf{r}_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

получаем

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2.6.6)$$

где символ  $\partial$  обозначает частную производную по какой-либо переменной при постоянных значениях других переменных. Например, частная производная  $\partial/\partial x$  вычисляется при постоянных значениях  $y$  и  $z$  ( $dy = dz = 0$ ). Полную силу, действующую на частицу,

тогда можно выразить как

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \equiv - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv -\text{grad } U \equiv -\nabla U, \quad (2.6.7)$$

где  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  – оператор Гамильтона, который формально во многих случаях можно рассматривать как вектор<sup>5</sup>.

Функции  $U(\mathbf{r})$  и  $U' = U(\mathbf{r}) + \text{const}$ , как это следует из соотношения (7), соответствуют одному и тому же полю сил, т. е. физически эквивалентны. Выбором константы в каждой конкретной задаче можно произвольно распорядиться для установления наиболее удобной точки (или поверхности) начала отсчета потенциальной энергии.

Уравнение  $U(\mathbf{r}) = \text{const}$  определяет эквипотенциальные поверхности (поверхности уровня), при движении по которым потенциальная энергия не меняется; она остается неизменной и в том случае, если движение лишь начинается и заканчивается на поверхности одного уровня.

*Пример 1.* Поле одномерной силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (f(x), 0, 0)$ . Для любого замкнутого контура  $l$  имеем

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0,$$

т. е. данное поле сил является потенциальным.

Таковыми являются, например, поле тяжести вблизи поверхности Земли, где

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (0, -mg, 0), \quad \rightarrow \quad U = mgy + \text{const},$$

и поле сил одномерного линейного осциллятора, у которого

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-kx, 0, 0), \quad \rightarrow \quad U = \frac{1}{2}kx^2 + \text{const}.$$

Обычно выбирают  $\text{const} = 0$ .

---

<sup>5</sup> При применении оператора Гамильтона к *произведению функций точки* надо соблюдать определенные правила.

*Пример 2.* Центральное поле сил

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Так как  $\mathbf{r}^2 = r^2$ ,  $\rightarrow \mathbf{r}d\mathbf{r} = r dr$ , то  $\mathbf{F} d\mathbf{r} = f(r) dr$ , и для любого замкнутого контура

$$\oint \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} f(r)dr + \int_{r_{max}}^{r_{min}} f(r)dr = 0,$$

т. е. центральное поле является потенциальным.

Таковыми являются так называемое *кулоново поле*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} + const;$$

а также *изотропный гармонический осциллятор*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}; \quad U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k \mathbf{r}^2 + const.$$

Обычно выбирают  $const = 0$ .

*Пример 3.* Сила трения  $\mathbf{F}$  обычно направлена противоположно скорости, поэтому

$$\oint \mathbf{F}d\mathbf{r} = \oint \mathbf{F}\mathbf{v} dt < 0,$$

т. е. силы трения не являются потенциальными.

*Пример 4.* Поле двух частиц, между которыми действует сила взаимного притяжения (или отталкивания), зависящая только от расстояния между точками.

Обозначим  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Тогда сила, действующая на первую частицу,

$$\mathbf{F}_1 = F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где  $F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = F(r)$  – некоторая заданная функция расстояния между частицами. Сила  $\mathbf{F}_2$ , действующая на вторую частицу, равна и противоположна силе  $\mathbf{F}_1$ . Тогда

$$dA = \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2 = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{r}.$$

Из полной формальной аналогии с примером 2 следует, что

$$dA = F(r)dr,$$

и потенциальная энергия взаимодействия определится как

$$U = - \int F(r)dr + \text{const.} \quad (2.6.8)$$

Однако переменной здесь является уже не радиус-вектор частицы, а расстояние между взаимодействующими частицами. Данный пример иллюстрирует, в частности, то обстоятельство, что *потенциальная энергия взаимодействующих частиц не является аддитивной*. Функцию  $U$  в выражении (8) нельзя получить как сумму значений, подсчитанных порознь для первой и второй частиц, так как она является функцией расстояния  $r$ , определяемого положением двух частиц одновременно.

## 2.7. Механическая энергия системы. Изменение и сохранение

*Полную механическую энергию системы частиц ( $E$ ) определим как сумму кинетических энергий частиц системы, потенциальной энергии их взаимодействия друг с другом и энергии взаимодействия частиц с внешними полями.*

Рассмотрим замкнутую систему потенциально взаимодействующих частиц. В данном случае

$$E = K + U, \quad K = \sum_i \frac{mv_i^2}{2}, \quad U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n).$$

Производная по времени от полной энергии данной системы частиц

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} \dot{\mathbf{v}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \sum_i \mathbf{v}_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i) = 0. \quad (2.7.1)$$

*Полная механическая энергия замкнутой системы потенциально взаимодействующих частиц постоянна (сохраняется).*



Пусть теперь рассматриваемая система частиц не является замкнутой, а находится в некотором силовом поле, создаваемом внешними источниками потенциальных сил. Механическая энергия такой системы будет являться суммой кинетической энергии частиц ( $K$ ), потенциальной энергии взаимодействия частиц друг с другом ( $U$ ) и энергии взаимодействия ( $U'$ ) частиц с внешним силовым полем:

$$E = K + U + U'.$$

Силы, действующие на частицы системы, в данном случае будут определяться соотношениями

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}(U + U').$$

Полная механическая энергия системы в рассматриваемом случае может и не сохраняться, так как изменение энергии

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_i \left( \frac{dK}{d\mathbf{v}_i} \dot{\mathbf{v}}_i + \frac{\partial(U + U')}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i \right) + \frac{\partial U'}{\partial t} = \\ &= \sum_i \mathbf{v}(m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i) + \frac{\partial U'}{\partial t} = \frac{\partial U'}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

в общем случае не равно нулю. Полная механическая энергия системы сохраняется лишь в том случае, когда внешнее силовое поле *стационарно*, т. е. не зависит явно от времени ( $\partial U'/\partial t = 0$ ), и потенциально ( $\partial U'/\partial \mathbf{r}_i = -\mathbf{F}'_i$ , где  $\mathbf{F}'_i$  – сила, действующая со стороны внешнего поля на  $i$ -ю частицу). Системы потенциально взаимодействующих частиц, находящиеся во внешних стационарных потенциальных силовых полях, называют *консервативными системами*.

Обобщая, можно сформулировать закон сохранения (механической) энергии: **полная (механическая) энергия консервативных систем сохраняется.**

Следует обратить внимание, что в сформулированном законе сохранения энергии нет требования замкнутости системы. Консервативные и замкнутые системы часто путают. Классы консервативных и замкнутых систем не совпадают, а пересекаются. Например,

система гравитационно взаимодействующих частиц, движущихся в стационарном поле тяготения какой-либо массы, не включенной в систему, консервативная, но не замкнутая; и наоборот, замкнутая система, в которой все или некоторые внутренние силы не являются потенциальными, неконсервативна.

К непотенциальным силам относятся, прежде всего, *диссипативные* силы, зависящие помимо конфигурации тел от их *относительных скоростей* (например, силы трения и силы сопротивления, испытываемые телом при движении в жидкой или газообразной среде). Еще один вид непотенциальных сил – *гироскопические силы*. Так называют силы, зависящие от скорости частицы и направленные всегда перпендикулярно к вектору скорости частицы. Работа таких сил всегда равна нулю. От потенциальных такие силы отличаются тем, что определяются не только положением, но и относительными скоростями частиц. Из сил, рассматриваемых в инерциальных системах отсчета, единственным примером гироскопических сил, известных в физике, является *сила Лоренца* – сила, действующая в магнитном поле на движущуюся заряженную частицу.

Закон сохранения энергии в общем случае соблюдается тогда, когда в системе действуют только консервативные и/или гироскопические силы.

Рассмотрим теперь такую систему, в которой все или некоторые силы непотенциальны. Элементарная работа сил в такой системе равна:  $dA = dA^* + dA_* = dK$ , где  $dA^*$ ,  $dA_*$  – элементарные работы непотенциальных и потенциальных сил соответственно (напомним, что в соответствии с формулой (2.6.2) дифференциал кинетической энергии равен элементарной работе всех сил). Тогда

$$dA = -dU + dA^*, \quad \rightarrow \quad d(K + U) = dA^*, \quad \text{или} \quad dE = dA^*. \quad (2.7.3)$$

*Приращение полной энергии неконсервативных систем равно элементарной работе непотенциальных сил.*

Например, в замкнутой, но неконсервативной системе полная ме-

ханическая энергия не сохраняется<sup>6</sup>. Сохраняться будут лишь полный импульс и момент полного импульса системы, так как это обеспечивается равенством сил действия и противодействия независимо от природы сил.

При нерелятивистском переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой потенциальная энергия, зависящая от взаимных расстояний, не изменяется, а кинетическая энергия изменяется:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V})^2 = K' + \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \mathbf{P}' \mathbf{V};$$

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i; \quad m = \sum_i m_i.$$

Если штрихованная система является системой центра инерции, то  $\mathbf{P}' = 0$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_c$  и

$$K = K_c + \frac{1}{2} m \mathbf{V}_c^2, \quad E = E_c + \frac{1}{2} m \mathbf{V}_c^2. \quad (2.7.4)$$

*Полная и кинетическая энергии системы частиц минимальны в системе отсчета, связанной с центром инерции этой системы. Первое соотношение в выражениях (4) иногда называют теоремой Кенига. Кинетическая энергия твердого тела равна кинетической энергии, которой обладала бы частица с массой, равной массе тела, расположенная в центре инерции и движущаяся вместе с ним поступательно, плюс кинетическая энергия тела в его движении относительно системы отсчета, связанной с центром инерции.*

Разделение энергии частицы на части далеко не всегда возможно. Это связано с неаддитивностью потенциальной энергии. И если кинетическая энергия системы является суммой кинетических энергий ее частей, то потенциальная энергия в общем случае существует для системы в целом, и понятие "потенциальная энергия частицы" часто лишено смысла.

---

<sup>6</sup> Полная энергия во всех возможных формах ее проявления в замкнутых системах безусловно сохраняется.

Во многих задачах механики условия таковы, что внутреннее состояние фигурирующих в задаче макрообъектов не меняется, т. е. не изменяется та часть потенциальной энергии, что связана с взаимодействием частиц, составляющих тело, и та часть кинетической энергии частиц, которая связана с их движением относительно центра инерции тела. В подобных случаях эти составляющие энергии при проведении решения просто не учитываются.

**Подведем итоги**, сведя полученные основные теоремы и законы сохранения в таблицу.

Характеристика движения	Основная теорема	Закон сохранения	Где верен закон сохранения
Импульс $\mathbf{P}$	$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}}$	$\mathbf{P} = \text{const}$	Любые системы, где $\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0$
Момент импульса $\mathbf{L}$	$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}_{\text{внеш}}$	$\mathbf{L} = \text{const}$	Любые системы, где $\mathbf{N}_{\text{внеш}} = 0$
Полная энергия $E$	$dE = dA^*$	$E = \text{const}$	Консервативные системы

## Глава 3

# ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАКОНОВ И ТЕОРЕМ МЕХАНИКИ

### ЛЕКЦИЯ 6

Получение решения уравнений движения в замкнутой форме возможно лишь для частных случаев функциональных зависимостей, выражающих силы. Механика тщательно собирает и изучает все случаи, когда дифференциальные уравнения движения могут быть проинтегрированы в общем виде.

Во многих случаях уже сами по себе законы сохранения энергии и импульса позволяют сделать ряд важных заключений о свойствах различных механических процессов. При этом особенно существенно то обстоятельство, что эти свойства совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе телами.

В этой и трех последующих лекциях мы рассмотрим некоторые практически очень важные классы задач, для которых получены решения уравнений движения.

### 3.1. Динамика твердого тела

**Вводные замечания.** *Под твердым (абсолютно твердым) телом будем понимать совокупность частиц, взаимные расстояния между которыми не меняются.*

При рассмотрении твердых тел встречаемся с частным, но очень важным видом потенциального взаимодействия частиц. Конкретный вид сил как функций от взаимных расстояний частиц здесь не имеет значения. Существенно то обстоятельство, что эти силы обеспечивают неизменное взаимное расположение частиц тела при воздействии на последнее внешних сил, фигурирующих в конкретных задачах<sup>1</sup>.

Разумеется, все законы, теоремы и вытекающие из них соотношения, полученные ранее, при установлении которых конкретный вид потенциальных сил не играл значения, полностью применимы и к твердому телу.

Если ввести подвижную, жестко связанную с телом и участвующую во всех его движениях систему координат, то ее положение и, тем самым, положение тела относительно "неподвижной" системы координат будет определяться радиус-вектором  $\mathbf{R}$  точки начала подвижной системы координат и ориентацией осей этой системы относительно неподвижной. Ориентация же определяется тремя независимыми углами, так что с тремя компонентами вектора  $\mathbf{R}$  имеем всего шесть независимых координат. *Всякое твердое тело представляет механическую систему с шестью степенями свободы, т. е. систему, положение которой полностью определяется значениями шести независимых координат.*

Неизменность взаимных расстояний между точками твердого тела в какой-то мере упрощает описание его движения. В принципе мы уже имеем два векторных уравнения (2.4.4) и (2.5.4), справедливых для произвольно выбранной системы материальных точек и

---

<sup>1</sup> Точнее, внешние силы приводят к малым отклонениям во взаимном расположении частиц, не существенным при рассмотрении движения.

дающих шестерку независимых переменных уравнений движения.

Тем не менее задачи о движении твердых тел относятся к наиболее трудным в механике. Это связано с тем, что определение импульса и момента импульса при произвольных конфигурациях и плотностях твердого тела и при его произвольном движении представляет непростую задачу.

**Скорости точек твердого тела.** Жестко свяжем с телом систему координат с началом в произвольно выбранной в теле точке  $O$ . Рассмотрим произвольное бесконечно малое перемещение твердого тела. Его можно представить в виде двух частей. Одна из них есть бесконечно малый параллельный перенос тела, в результате которого точка  $O$  переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая часть – бесконечно малый поворот вокруг точки  $O$ , в результате которого твердое тело переходит в конечное положение.

Обозначим радиус-вектор произвольной точки  $M_i$  твердого тела в подвижной системе координат  $\mathbf{r}_{oi}$ , а радиус-вектор этой же точки в неподвижной системе координат  $\mathbf{r}_i$ . Радиус-вектор точки  $O$  в неподвижной системе координат обозначим  $\mathbf{R}$ . Тогда бесконечно малое перемещение  $d\mathbf{r}_i$  точки  $M_i$  складывается из перемещения  $d\mathbf{R}$  вместе с точкой и перемещения  $d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_{oi}$  относительно точки  $O$  при повороте на бесконечно малый угол  $d\varphi$  относительно некоторой оси, проходящей через точку  $O$ :

$$d\mathbf{r}_i = d\mathbf{R} + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_{oi}.$$

Здесь введен вектор бесконечно малого поворота  $d\boldsymbol{\varphi}$ , абсолютная величина которого равна углу поворота  $d\varphi$ , а направление совпадает с осью поворота (направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению  $d\boldsymbol{\varphi}$ ).

Разделив последнее равенство на время  $dt$ , в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, и введя угловую скорость

вращения  $\boldsymbol{\omega} = d\varphi/dt$ , получим важное соотношение:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{oi}. \quad (2.8.1)$$

Вектор  $\mathbf{V}_o$  есть скорость точки  $O$ , произвольно выбранной в качестве начала подвижной системы отсчета. Направление вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (как и направление вектора  $d\varphi$ ) совпадает с направлением оси вращения.

Соотношение (1) показывает, что в данный момент времени скорость  $\mathbf{v}_i$  любой точки тела (относительно неподвижной системы координат) может быть выражена через скорость движения произвольно выбранной точки и угловую скорость вращения тела относительно некоторой оси, проходящей через эту выбранную точку. Сложение векторных величин, естественно, производится по правилам сложения векторов.

Сделаем два замечания.

1. Если значение  $d\varphi/dt = \boldsymbol{\omega} = 0$ , то  $\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_o$ , т. е. скорости всех точек тела одинаковы. Такое движение называется *поступательным*. При поступательном движении отрезок, соединяющий две произвольно выбранные точки тела, перемещается параллельно самому себе.

2. Если  $\mathbf{V}_o = 0$ , то движение твердого тела сводится только к одному вращению вокруг неподвижной точки.

Возникает вопрос, как зависит вектор  $\boldsymbol{\omega}$  от выбора точки  $O$ . Ответ дает следующая

**Т е о р е м а . Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  не зависит от выбора точки  $O$ .**  
Доказательство. Помимо рассмотренной ранее произвольно выбранной точки  $O$  рассмотрим какую-либо другую также произвольно выбранную точку  $O'$ . Пусть  $\mathbf{r}_o$  и  $\mathbf{r}_{o'}$  – радиус-векторы, проведенные к произвольной точке  $M$  тела из точек  $O$  и  $O'$  соответственно. Обозначим вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $O'$  как  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_{o'} - \mathbf{r}_o$ . Скорость  $\mathbf{v}$  точки  $M$ , согласно (1), может быть записана двояко:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}_o = \mathbf{V}_{o'} + \boldsymbol{\omega}_{o'} \times \mathbf{r}_{o'}.$$



Но, согласно равенству (1),

$$\mathbf{V}_{O'} = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{a}. \quad (2.8.2)$$

Тогда

$$\mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{r}_O = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega}_{O'} \times (\mathbf{r}_O - \mathbf{a}).$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\boldsymbol{\omega}_O \times (\mathbf{r}_O - \mathbf{a}) = \boldsymbol{\omega}_{O'} \times (\mathbf{r}_O - \mathbf{a}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_{O'} = \boldsymbol{\omega}_O.$$

Это справедливо для произвольно выбранной точки  $O'$ ; теорема доказана.

Угловая скорость, с которой вращается в каждый данный момент времени жестко связанная с телом система координат, оказывается совершенно не зависящей от этой системы. Все такие системы вращаются в любой данный момент времени вокруг параллельных друг другу осей, проходящих через точки начал отсчета этих систем с одинаковой по абсолютной величине угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Данное обстоятельство и дает право называть  $\boldsymbol{\omega}$  угловой скоростью вращения твердого тела как такового.

Отметим следующее. Из соотношения (1) следует, что если  $\mathbf{V}_O$  и  $\boldsymbol{\omega}_O$  (в данный момент времени) взаимно перпендикулярны, то вектор скорости любой точки тела (в тот же момент времени) будет суммой двух векторов ортогональных вектору  $\boldsymbol{\omega}_O$  и, следовательно, также ортогонален вектору  $\boldsymbol{\omega}_O$ . Произвольный выбор точки  $O$  означает, что если в какой-то момент времени вектор  $\boldsymbol{\omega}_O$  ортогонален вектору скорости какой-либо точки тела, то он (в тот же момент времени) будет ортогонален векторам скоростей всех остальных точек тела. В данном случае скорости  $\mathbf{v}_i$  всех точек тела будут лежать в плоскостях, перпендикулярных вектору  $\boldsymbol{\omega}$ . При этом всегда можно выбрать такое начало  $O'$  (оно может находиться и вне пределов тела), скорость  $\mathbf{V}_{O'}$  которого равна (в данный момент) нулю, так что движение твердого тела будет представлено как чистое вращение вокруг оси, проходящей через точку  $O'$ . Эту ось называют *мгновенной осью вращения тела*.

При решении кинематических задач вопрос, какую точку удобнее взять за начало ( $O$ ) подвижной системы координат, решается исходя из условий задачи. При решении задач динамики определенные удобства появляются при совмещении точки начала подвижной системы координат с центром инерции тела. При таком выборе точки начала подвижной системы координат ее скорость в неподвижной системе определяется уравнением (2.4.4):

$$m\dot{\mathbf{V}}_c = \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

где  $\mathbf{F}$  – сумма внешних сил, действующих на тело.

Еще тройка уравнений определится соотношением (2.5.4):

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = \mathbf{N}_c,$$

где моменты импульса тела и внешних сил рассматриваются относительно центра инерции тела.

Как уже отмечалось, эти два векторных уравнений определяют необходимую *шестерку независимых уравнений движения твердого тела*.

В соответствии с теоремой Кенига (первое из соотношений (2.7.4)), справедливой для системы частиц общего вида, кинетическая энергия твердого тела в неподвижной системе равна

$$K = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2, \quad (m = \sum_i m_i). \quad (2.8.3)$$

Если же центр подвижной системы выбран не в центре инерции, то в выражении (3) появятся дополнительные члены.

В дальнейшем твердое тело будем рассматривать как дискретную совокупность материальных точек, что несколько упрощает выкладки. Это не противоречит тому, что в механике твердые тела обычно рассматривают как сплошные, не интересуясь их внутренней структурой. Переход от формул с суммированием по дискретным точкам

к формулам для сплошного тела осуществляется заменой масс частиц на массу  $\rho dV$ , заключенную в элементе объема  $dV$  ( $\rho$  – плотность массы), и интегрированием по всему объему тела.

### **Вращение твердого тела при наличии поступательно движущихся осей.**

Рассмотрим сначала достаточно простой случай движения твердого тела – вращение вокруг неподвижной оси (ось закреплена). При этом все точки тела движутся по окружностям с центрами на оси вращения, радиусы которых равны расстоянию от точки до оси вращения, а плоскости окружностей перпендикулярны оси вращения. Кинетическая энергия вращения

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i \rho_i^2,$$

где  $\rho_i$  – расстояние от  $i$ -й точки до оси. Сумма, входящая в данное выражение, носит название *момента инерции тела относительно выбранной оси* и обозначается через  $I$ :

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2. \quad (2.8.4)$$

Кинетическая энергия вращения при этом

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (2.8.5)$$

Обозначим ось вращения через  $u$ . Выберем произвольно точку на оси. Момент импульса относительно выбранной точки

$$\mathbf{L} = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i),$$

где  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор  $i$ -й частицы с началом в выбранной точке. Изменение момента импульса определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}.$$

Последнее уравнение представляет собой равенство векторов, т. е. равенство справедливо и для проекций этих векторов на любую ось. Спроецируем это уравнение на ось  $u$ . Величина проекции момента импульса на ось вращения ( $L_u$ ), как и проекция момента сил ( $N_u$ ) на эту ось, *не зависят от положения выбранной на оси точки* (покажите это) и называются **моментом импульса относительно оси** и **моментом силы относительно оси** соответственно. Момент импульса относительно оси

$$L_u = \sum_i m_i v_i \rho_i = \omega \sum_i m_i \rho_i^2,$$

или

$$L_u = I_u \omega. \quad (2.8.6)$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_u \dot{\omega} = I_u \ddot{\varphi} = N_u. \quad (2.8.7)$$

Здесь  $\varphi$  – угол поворота вокруг оси  $u$ . Если известны зависимость момента внешних сил относительно оси  $u$  ( $N_u$ ) от времени (либо от  $\varphi$ , либо от  $\omega$ ) и начальные данные, то решение дифференциального уравнения (7) позволит найти  $\varphi$  как функцию времени.

В последнем равенстве индексом  $u$  подчеркнуто, что момент инерции и момент силы вычисляются относительно оси вращения  $u$ .

Если ось вращения не неподвижна, а *движется поступательно*, то, согласно равенству (2.8.3), кинетическая энергия тела будет складываться из кинетической энергии его поступательного движения как целого и кинетической энергии вращения:

$$K = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2, \quad (2.8.8)$$

где  $V_c$  – скорость центра инерции и  $I_c$  – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр инерции.

*При поступательном движении осей вращения останется справедливым уравнение (7) для изменения момента импульса относительно оси.* Это следствие того, что уравнение (2.5.4) переходит в

уравнение (2.5.2), когда скорость движущегося начала  $A$  параллельна скорости центра инерции. Аналогичные результаты справедливы и для движущихся осей, когда ось движется поступательно. Нет необходимости формулировать этот результат отдельно, так как уравнение моментов относительно оси получается из соответствующего уравнения для моментов импульса относительно точки и проецирования последнего на эту ось.

Для вращения вокруг мгновенной оси соответственно имеем

$$L_\omega = I_\omega \omega \quad K = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2 ,$$

где  $I_\omega$ ,  $L_\omega$  – момент инерции и момент импульса относительно мгновенной оси соответственно.

При определении моментов инерции относительно различных осей часто оказывается полезной

**Т е о р е м а** (Гюйгенса – Штейнера). *Момент инерции тела  $I_{c'}$  относительно произвольной оси  $c'$  равен моменту инерции тела  $I_c$  относительно оси  $c$ , параллельной  $c'$  и проходящей через центр инерции тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями, т. е.*

$$I_{c'} = I_c + md^2 , \tag{2.8.9}$$

где  $d$  – расстояние между осями  $c$  и  $c'$ . (Доказательство предоставляется студентам.)

## ЛЕКЦИЯ 7

### 3.2. Движение в центральном поле

Рассмотрим движение частицы в потенциальном поле  $U(r)$ ; такое поле называют *центральным*. В этом случае сила

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

действующая на частицу, зависит только от  $r$  и направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего центр поля с частицей. Так как центральное поле сил потенциально и момент сил относительно центра равен нулю, то для частиц, находящихся в центральном поле, *будут сохраняться момент импульса относительно центра поля и полная энергия*. Анализ движения в этом случае представляет собой выделение из всевозможных видов движения тех, которые не противоречат этим двум законам сохранения. Сохранение момента импульса ( $\mathbf{L}$ ) означает, что *движение частицы будет целиком лежать в одной плоскости*. Поэтому для анализа естественно и удобно выбрать полярную систему координат с началом в центре поля. Сохранение момента импульса выразится соотношением

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (3.1.1)$$

Заметим, что из равенства (1) следует знакопостоянство  $\dot{\varphi}$ , а это исключает движения частицы, при которых нарушается *монотонность изменения угла  $\varphi$  со временем*. Уравнение сохранения энергии с учетом равенства (1) может быть представлено в виде

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_*(r) = \text{const}, \quad (3.1.2)$$

где выражение  $U_*(r) = L^2/(2mr^2) + U(r)$  иногда называют "эффективной" потенциальной энергией. Эффективная энергия, как и "истинная" потенциальная энергия, зависит только от  $|\mathbf{r}|$ . Разре-

шая уравнение (2) относительно  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_*(\mathbf{r})]}, \quad (3.1.3)$$

и интегрируя, получаем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_*(\mathbf{r})]}} + const. \quad (3.1.4)$$

Записав равенство (1) в виде

$$d\varphi = Ldt/(mr^2),$$

подставив  $dt$  из уравнения (3) и проинтегрировав, получим:

$$\varphi = \int \frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m[E - U_*(\mathbf{r})]}} + const. \quad (3.1.5)$$

Формулы (4)–(5) при заданных значениях  $E$ ,  $L$  и  $U(r)$  в общем случае решают поставленную задачу, определяя траекторию ( $\varphi = \varphi(r)$ ) и расстояние от центра  $r$  как неявную функцию времени.

Значения  $r$ , при которых

$$E = U_*(r), \quad (3.1.6)$$

определяют *границы движения*. В этом случае  $\dot{r} = 0$ , что, однако, не означает остановки движения, так как  $\dot{\varphi} \neq 0$ . Равенство  $\dot{r} = 0$  и, как следствие, соотношение (6) определяют точки, в которых  $r$  имеет экстремальное значение (наименьшее и наибольшее удаление траектории движения от центра поля). При заданной зависимости  $U(r)$  нахождение таких точек сводится к решению алгебраического уравнения (6).

Если область допустимых значений  $r$  ограничена лишь условием  $r \geq r_{min}$ , то движение частицы, начинаясь на бесконечности, достигает "точки поворота" при  $r = r_{min}$  и уходит далее на бесконечность (такое движение называется *инфинитным*).

Если же область допустимых значений  $r$  ограничена условиями  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ , то движение будет финитным – целиком лежать в кольце, ограниченном радиусами  $r_{min}$  и  $r_{max}$ .

В точке поворота траектории значение  $\dot{r}$ , а следовательно, и квадратный корень в уравнении (3) (а вместе с ним и подынтегральные выражения в равенствах (4) и (5)) меняют знак. Если отсчитывать угол  $\varphi$  от направления радиус-вектора, проведенного в точку поворота, то примыкающие с двух сторон к этой точке отрезки траектории будут симметричны относительно радиус-вектора точки поворота, отличаясь лишь знаком  $\varphi$  при каждом одинаковых значениях  $r$ . Это относится как к финитным, так и к инфинитным движениям; траектории в обоих случаях состоят из двух ветвей симметричных относительно радиус-вектора, проведенного в точку  $r_{min}$ .

Финитность траектории еще не означает, что траектория замкнута. В общем случае траектория финитного движения незамкнута. Все финитные траектории движения будут замкнуты лишь в центральных полях, потенциальная энергия которых  $\sim -1/r$  или  $\sim r^2$ . Первый случай соответствует движению в так называемых кулоновских полях, а второй – так называемому изотропному пространственному осциллятору.

**"Задача двух тел"**. Рассмотрим какую-либо замкнутую систему из двух взаимодействующих частиц, потенциальная энергия взаимодействия которых зависит лишь от расстояния между ними  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ :

$$U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = U(r), \quad \frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}_2}.$$

Чрезвычайно важная задача определения движения двух таким образом взаимодействующих частиц, получившая название "задачи двух тел", допускает решение в общем виде.

Выпишем уравнения движения каждой из частиц:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\partial U(r) / \partial \mathbf{r}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\partial U(r) / \partial \mathbf{r}_2. \quad (3.1.7)$$



Решение системы (7) существенно упрощается, если перейти к новым переменным:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.1.8)$$

Переменная  $\mathbf{R}$  является радиус-вектором центра инерции частиц,  $|\mathbf{r}|$  – расстояние между частицами.

Выразим исходные переменные  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  через новые переменные  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$ . Из соотношений (8) находим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{R}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{R}. \quad (3.1.9)$$

Подставляя эти выражения в равенства (7) и складывая последние, получаем

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}} = \text{const}.$$

Как и следовало ожидать, центр инерции двух взаимодействующих частиц движется с постоянной (возможно, и нулевой) скоростью, определяемой начальными условиями. Вычитая теперь из первого равенства (7) второе, с учетом соотношений (9), получаем

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}, \quad (3.1.10)$$

где введено обозначение  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Величина  $\mu$  называется *приведенной массой*. Какого-либо существенного физического смысла эта величина не имеет, ее надо рассматривать как целесообразное обозначение при математических выкладках.

Если получено решение этой задачи  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , то траектории движения каждой из частиц и их скорости определяются из соотношений (9). Если в качестве начала системы отсчета выбрать центр инерции частиц, то тогда

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (3.1.11)$$

**Другой подход.** Введем те же новые переменные  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$ , и сразу поместим начало координат в центр инерции. Тогда

$$\mathbf{R} = 0 \text{ и } \mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad U = U(r). \quad (3.1.12)$$

В центральном поле энергия и момент импульса системы сохраняются:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + U(r) = \text{const} \text{ и } \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const}. \quad (3.1.13)$$

Или, используя (12),

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) \rightarrow E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) \text{ и } \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} \rightarrow L = \mu r^2 \dot{\varphi}. \quad (3.1.14)$$

Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих частиц сводится к решению рассмотренной нами задачи о движении одной частицы с массой, равной приведенной массе  $\mu$ , в центральном поле  $U(r)$ .

### 3.3. Движение в кулоновских полях (задача Кеплера)

Рассмотрим частный, но очень важный случай движения в центральных полях, потенциальная энергия которых  $\sim 1/r$ .

Рассмотрим сначала поля притяжения, для которых

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0. \quad (3.2.1)$$

В соответствии с замечанием в конце предыдущего параграфа, траектории финитных движений в таких полях будут замкнуты.

В этом случае эффективная энергия

$$U_*(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (3.2.2)$$

Уравнение (3.1.6), определяющее границы движения, примет вид

$$E = U_*(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2E} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \right). \quad (3.2.3)$$

Анализ этого решения показывает, что *при значениях полной энергии  $E \geq 0$  движение будет инфинитным* (уравнение (3) имеет лишь один неотрицательный корень).

*Финитность движения обеспечивается условием  $E < 0$ .* При данном условии уравнение (3) имеет два неотрицательных конечных корня, если  $U_{*min} < E$ . Случай  $E = U_{*min}$  соответствует значению  $r_{1,2} = -\alpha/2E$ ,  $\rightarrow \dot{r} = 0$ ; при этом траектория движения будет представлять окружность радиуса  $r = -\alpha/2E = L^2/m\alpha$ .

Подставив в уравнение (3.1.5) выражение для  $U_*(r)$  из выражения (2) и проинтегрировав, получаем

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L^2}{m\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} + \text{const}. \quad (3.2.4)$$

Так как значение постоянной в выражении (4) определяется выбором начала отсчета угла  $\varphi$ , то, положив  $\text{const} = 0$ , уравнение траектории представим в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (3.2.5)$$

где введены обозначения

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (3.2.6)$$

Принятый выше выбор константы определяет начало отсчета угла  $\varphi$  от направления, соответствующего минимальному радиус-вектору частицы, т. е. значению  $\varphi = 0$  соответствует значение  $r = r_{min}$  (так называемый *перигелий* орбиты).

Уравнение (5) – уравнение *конического сечения* с фокусом в начале координат;  $p$  и  $e$  называются *параметром* и *эксцентриситетом орбиты* соответственно. В эквивалентной задаче двух тел, энергия взаимодействия которых определяется выражением типа (1), орбита каждой частицы также является коническим сечением с фокусом в центре инерции частиц.

При  $E < 0$  значение эксцентриситета  $e < 1$  и, как отмечено выше, движение финитно. Траектория финитного движения – эллипс, большая и малая полуоси которого определяются формулами

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2 |E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m |E|}}. \quad (3.2.7)$$

Если момент импульса частицы ( $\mathbf{L}$ ) сохраняется, то ее секториальная скорость ( $\mathbf{f}$ ) постоянна и  $L = 2mf$ . Отсюда  $2mS = TL$ , где  $T$  – время полного обращения по орбите, а  $S = \pi ab$  – площадь эллипса. Используя равенства (7), получаем для периода полного обращения (третий закон Кеплера)

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2 |E|^3}}. \quad (3.2.8)$$

Для лучшего уяснения полученных результатов рассмотрим сначала частный случай движения по круговой орбите. Все величины, относящиеся к движению по круговой орбите, будем отмечать нижним индексом ноль. В этом случае эксцентриситет орбиты  $e = 0$ , а радиус орбиты  $r_o = p = L^2/m\alpha$ . Значение полной энергии совпадает со значением эффективной энергии, т. е.

$$E_o = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2} = -\frac{\alpha}{2r_o} = \frac{1}{2}U(r_o).$$

Таким образом, полная энергия частицы на круговой орбите равна половине ее потенциальной энергии. Отсюда кинетическая энергия  $E_{ok} = mv_o^2/2 = -U(r_o)/2$ . Обобщая, запишем для круговой орбиты

$$E_o = -E_{ok} = \frac{1}{2}U(r_o). \quad (3.2.9)$$

Представим, что скорость некоторого тела, вращающегося на круговой орбите, в некоторой точке  $A$  "мгновенно" изменилась до значения  $\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}_o$ . Полная энергия тела при этом, с учетом соотношений (9), примет значение

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r_o} = \frac{m(\beta v_o)^2}{2} - \frac{\alpha}{r_o} = -E_o\beta^2 + 2E_o = E_o(2 - \beta^2). \quad (3.2.10)$$

При  $|\beta| < \sqrt{2}$  полная энергия  $E$  имеет тот же знак, что и  $E_0$ , т. е. будет отрицательна. Все возможные траектории тела при этом будут финитны и представлять из себя семейство эллипсов, проходящих через точку  $A$  и имеющих один из фокусов в центре круговой орбиты. Большие полуоси ( $a$ ) таких орбит, согласно соотношениям (7), будут иметь значения

$$a = a_0 \frac{|E_0|}{|E|} = a_0 / (2 - \beta^2) = r_0 / (2 - \beta^2). \quad (3.2.11)$$

При  $|\beta| < 1$  все такие эллиптические орбиты будут лежать внутри окружности радиуса  $r_0$ , а при  $1 < |\beta| < \sqrt{2}$  – вне этой окружности. При  $\beta = \pm\sqrt{2}$  значение  $E = 0$  и траектория орбиты будет параболой; при  $|\beta| > \sqrt{2}$  – гиперболой.

В полях отталкивания "эффективная" потенциальная энергия

$$U_* = \alpha/r + L^2/2mr^2 \quad (\alpha > 0).$$

Полная энергия при этом всегда положительна ( $E > 0$ ), и траектория является гиперболой. Все выкладки аналогичны приведенным выше. Уравнение траектории в этом случае

$$r = p / (e \cdot \cos \varphi - 1),$$

где параметры  $p$  и  $e$  определяются прежними формулами.

Солнце – центральное тело Солнечной системы, сосредоточившее 99,866 % ее массы. Движение планет можно в хорошем приближении рассматривать как результат их гравитационного взаимодействия с Солнцем, пренебрегая взаимодействием с другими небесными телами, т. е. сводя таким образом задачу определения относительного движения планеты и Солнца к "задаче двух тел".

К задаче двух тел сводится также случай, когда расстояние, на котором находятся в любой момент гравитационно взаимодействующие тела, таково, что влиянием всех прочих источников гравитации на их относительное движение можно пренебречь (планеты и их спутники, двойные звезды).

Таким образом, задача о движении планет относительно Солнца и в ряде случаев задача о движении двух небесных тел относительно их центра инерции представляют частный случай "задачи двух тел". Последний же сводится к задаче о движении тела с приведенной массой  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  в поле центральной силы  $\mathbf{F}(r) = -(\alpha/r^3) \cdot \mathbf{r}$ . Следовательно, в этих случаях можно использовать все результаты, полученные при рассмотрении движений в кулоновских полях притяжения. Надо только заменить массу на приведенную массу и положить  $\alpha = \gamma m_1 m_2$ , где  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$  – гравитационная постоянная. Траектории каждого из тел при этом определяются формулами (3.1.11).

Отметим в связи с этим поправку к третьему закону Кеплера. Отношение квадратов времен обращения двух планет (массы  $m_1$  и  $m_2$ ) в соответствии с соотношением (8) выражается как

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{m_2 + M_s}{m_1 + M_s},$$

где  $M_s$  – масса Солнца. Последний множитель в третьем законе Кеплера отсутствует (оцените его влияние).

*Первая космическая* скорость ( $v_{1k}$ ) – минимальная скорость, которую надо сообщить телу для движения вокруг Земли по круговой орбите с радиусом, равным радиусу Земли ( $R_3$ ); сопротивление воздуха не учитывается. Имеем:

$$\frac{\gamma M_3 m}{R_3^2} = \frac{mv_1^2}{R_3} = mg \rightarrow v_{1k} = \sqrt{\gamma M_3 / R_3} = \sqrt{g R_3} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Если скорость тела, двигающегося на круговой околоземной орбите с первой космической скоростью, увеличить в  $\sqrt{2}$  раза, то, согласно вышесказанному, тело по параболической траектории покинет пределы земного притяжения, превратившись в спутник Солнца. Таким образом *вторая космическая скорость*  $v_{2k} = v_{1k} \sqrt{2} \approx 11,2 \text{ км/с}$ .

## ЛЕКЦИЯ 8

### 3.4. Распады и столкновения

**1. Распад частиц.** Рассмотрим процесс, представляющий собой самопроизвольный (т. е. без воздействия внешних сил) распад частицы на частицы, движущиеся после распада независимо друг от друга.

При распаде покоившегося сложного тела на несколько более простых тел справедливы законы сохранения

$$E_{\text{вн}} = \sum_i (E_{\text{вн}i} + \frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^2), \quad \sum_i m_i\mathbf{v}_i = 0. \quad (3.3.1)$$

Здесь  $E_{\text{вн}}$  – внутренняя энергия тела, зависящая от его внутреннего состояния; это сумма межмолекулярных и внутримолекулярных энергий взаимодействия и энергии теплового движения молекул. Так что распад возможен лишь при

$$\Delta E = E_{\text{вн}} - \sum_i E_{\text{вн}i} > 0. \quad (3.3.2)$$

Если покоившаяся частица распадается на две, то в силу сохранения импульса частицы разлетаются с равными и противоположно направленными импульсами (их абсолютное значение обозначим  $p_0$ ). Используя закон сохранения энергии, получим:

$$\Delta E = E_{\text{вн}} - (E_{\text{вн}1} + E_{\text{вн}2}) = \frac{p_0^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_0^2}{2\mu}, \quad (3.3.3)$$

где  $\mu$  – приведенная масса частиц распада. Уравнение (3) определяет значение импульса обеих частиц распада и их скорости  $v_{01} = p_0/m_1$ ,  $v_{02} = p_0/m_2$ .

Таким образом, если известно, на какие две частицы распадается исходная (точнее, если известны внутренние энергии исходной частицы и двух частиц, на которые она распадается), то можно указать скорости частиц распада  $v_{01}$  и  $v_{02}$  в той системе, в которой покоилась исходная частица.

Рассмотрим теперь систему отсчета, в которой частица до распада имеет скорость  $\mathbf{V}$ . Такую систему отсчета обычно называют лабораторной (л-системой) в отличие от системы центра инерции (ц-системы), в которой полный импульс равен нулю. Рассмотрим одну из частиц распада. Пусть  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_o$  – скорости этой частицы соответственно в л- и ц-системе. Из равенства  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_o$  получаем:

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_o^2, \quad (3.3.4)$$

где  $\theta$  – угол вылета частицы относительно направления скорости  $\mathbf{V}$ ;  $v$ ,  $V$ ,  $v_o$  – модули соответствующих скоростей, величины сугубо положительные. Этим уравнением определяется зависимость скорости частицы распада от направления ее вылета в л-системе; разрешая его, получаем:

$$v = V \cos \theta \pm \sqrt{V^2 \cos^2 \theta + v_o^2 - V^2} = V \cos \theta \pm \sqrt{v_o^2 - V^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.3.5)$$

Из соотношения (5) следует, что в случае  $V < v_o$  значениям  $v > 0$  соответствует знак плюс, т. е. в этом случае мы имеем однозначную зависимость между углом вылета частицы ( $\theta$ ) и ее скоростью. Угол вылета при этом может принимать любые значения.

Если  $V > v_o$ , то действительное решение существует только в том случае, когда  $\sin \theta < \sin \theta_{max} = v_o/V$ . Другими словами, скорость частицы распада в этом случае всегда направлена вперед и может находиться лишь в конусе с углом при вершине, равным  $2 \arcsin (v_o/V)$ . В этом случае в л-системе зависимость между углом вылета частицы и ее скоростью становится неоднозначной: одному и тому же значению угла  $\theta$  могут соответствовать два разных значения скорости  $v$ .

Умножая соотношение  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_o$  один раз векторно, а другой раз скалярно на  $\mathbf{V}$ , получим соотношения:

$$v \sin \theta = v_o \sin \theta_o, \quad v \cos \theta = V + v_o \cos \theta_o. \quad (3.3.6)$$

Исключая из соотношений (6) значения  $v$  (или  $v_o$ ), получаем фор-



мулы для связи между углами  $\theta$  и  $\theta_0$  в л- и ц-системах:

$$\operatorname{tg} \theta = v_0 \sin \theta_0 / (v_0 \cos \theta_0 + V), \quad \operatorname{tg} \theta_0 = v \sin \theta / (v \cos \theta - V). \quad (3.3.7)$$

**2. Упругие столкновения частиц.** Столкновения, при которых тела после некоторого сближения расходятся без изменения своего внутреннего состояния (а значит, и внутренней энергии), называются *упругими столкновениями*. Следовательно, при упругом столкновении частиц справедлив закон сохранения механической энергии. Кроме того, при любом столкновении свободных частиц справедлив закон сохранения их полного импульса. Исходя из этих законов, рассмотрим столкновение двух частиц. Далее штрихами помечены значения величин после столкновения.

Рассмотрим случай упругого столкновения, когда одна из частиц (пусть это частица с массой  $m_2$ ) до столкновения покоится. Это всегда можно сделать, перейдя в систему отсчета, связанную с покоящейся частицей. Законы сохранения импульса и энергии запишем в виде:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{и} \quad p_1^2 / (2m_1) = p_1'^2 / (2m_1) + p_2'^2 / (2m_2), \quad (3.3.8)$$

где штрихами помечены величины после столкновения. Переписав первое из уравнений (8) в виде  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_1$ , возведя его в квадрат и используя второе из уравнений (8), получим

$$p_2' = \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cdot \cos \theta_2, \quad (3.3.9)$$

где  $\theta_2$  – угол между векторами  $\mathbf{p}'_2$  и  $\mathbf{p}_1$ .

Из соотношения (9) следует, что максимальное значение импульса (а следовательно и энергии), которое при упругом столкновении может быть передано покоящейся частице равно

$$p_{2max}' = \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} p_1 \quad \rightarrow \quad E_{2max}' = \frac{p_{2max}'^2}{2m_2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1. \quad (3.3.10)$$

Аналогично, исключая  $p'_2$  из соотношений (8), получим для налетающей частицы значение импульса после столкновения в зависимости от угла отклонения от первоначального направления:

$$p'_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[ \cos \theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1} \right] \cdot p_1, \quad (3.3.11)$$

где  $\theta_1$  – угол между векторами  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}_1$ .

Упругое столкновение двух частиц проще всего выглядит в ц-системе, так как в силу указанных законов абсолютные значения импульсов частиц после столкновения не изменяются, меняются лишь направления их движения.

В ц-системе результат столкновения сводится к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине:

$$\mathbf{p}_{1o} = -\mathbf{p}_{2o}, \quad \mathbf{p}'_{1o} = -\mathbf{p}'_{2o}, \quad |\mathbf{p}_{1o}| = |\mathbf{p}_{2o}| = |\mathbf{p}'_{1o}| = |\mathbf{p}'_{2o}|. \quad (3.3.12)$$

Используя изложенный подход, рассмотрим *лобовое столкновение* двух частиц (центральный удар), до и после которого частицы движутся по одной и той же прямой (при этом возможно изменение направления скорости одной или обеих частиц на противоположное). Частицы до столкновения могут двигаться как встречно, так и в одном направлении.

Пусть в л-системе  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  – соответственно скорости первой и второй частиц до столкновения. Скорость их центра масс

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Тогда в ц-системе их скорости до соударения

$$\mathbf{v}_{1o} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_{2o} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}.$$

После лобового столкновения скорости в ц-системе сменятся на противоположные:

$$\mathbf{v}'_{1o} = -\mathbf{v}_{1o} + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}'_{2o} = -\mathbf{v}_{2o} + \mathbf{V}.$$

Переходя теперь в л-систему, получим скорости частиц после столкновения:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_{1\circ} + \mathbf{V} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{V}, \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_{2\circ} + \mathbf{V} = -\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{V}.$$

Или, избавляясь от скорости центра инерции,

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1 + 2m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\mathbf{v}_2 + 2m_1\mathbf{v}_1}{m_2 + m_1}. \quad (3.3.13)$$

**3. Неупругие столкновения частиц.** При неупругих столкновениях внутреннее состояние сталкивающихся тел изменяется за счет потери суммарной кинетической энергии сталкивающихся тел. Полная энергия замкнутой системы конечно же сохраняется, но закон сохранения механической энергии не выполняется.

Мы рассмотрим только лишь частный случай *абсолютно неупругого* столкновения, при котором частицы после столкновения движутся вместе, как бы "приклеиваясь" друг к другу. Общий импульс "склеившихся" частиц  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ . Потеря кинетической энергии равна

$$K - K' = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2,$$

где  $\mu$  – приведенная масса частиц. При фиксированном значении начальной кинетической энергии  $K$  величина ее потери  $K - K'$  максимальна в той системе отсчета, где центр инерции сталкивающихся частиц неподвижен, т. е. когда  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  (нерелятивистский аналог встречных пучков). В этом случае теряется вся кинетическая энергия.

## ЛЕКЦИЯ 9

### 3.5. Малые колебания

Колебания – процессы, точно или приблизительно повторяющиеся через равные промежутки времени. Причины возникновения колебаний могут быть различны. Наиболее распространенный случай – возникновение колебаний в результате отклонения системы от положения ее устойчивого равновесия. Система, выведенная из состояния устойчивого равновесия и предоставленная самой себе, начинает совершать колебания около положения равновесия. Вследствие неизбежных потерь энергии колебания в системе постепенно затухают и система возвращается в первоначальное положение равновесия. Такие колебания называют *собственными* или *свободными*.

Собственные колебания являются очень важными с точки зрения теории колебаний, так как условия возникновения и характер всех других типов колебаний, которые могут возникнуть в системе, в большинстве случаев существенно зависят от характера собственных колебаний, свойственных именно данной системе.

Несмотря на разную природу колебаний, в них обнаруживаются одни и те же физические закономерности; они описываются одними и теми же уравнениями, исследуются общими методами.

**1. Свободные колебания. Колебания при наличии трения.** Пусть механическая система находится в положении равновесия. Согласно теореме Лежен-Дирихле в этом положении будет экстремум потенциальной энергии системы; и если это будет минимум потенциальной энергии, то такое положение равновесия будет устойчивым.

Далее нас будут интересовать движения систем при относительно малых отклонениях от устойчивого положения равновесия. Ограничимся пока общим рассмотрением наиболее простого случая, когда система имеет одну степень свободы.

Так как начало отсчета потенциальной энергии может быть вы-

брано произвольно, то можно положить  $U(x_0) = 0$ . Начало отсчета координаты  $x$  также переместим в точку  $x_0$ . Потенциальная энергия может быть представлена в виде разложения

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} \cdot \frac{x}{1!} + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots$$

При этом  $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} > 0$  так как рассматривается положение устойчивого равновесия (минимума потенциальной энергии).

При малых отклонениях достаточно ограничиться первым не исчезающим членом, каковым в общем случае будет член второго порядка (напомним, что  $\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} = 0$ ). Тогда потенциальная энергия при малых отклонениях от устойчивого положения равновесия может быть представлена в виде

$$U(x) = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \quad (k = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} > 0),$$

а возникающая при этом сила –

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx.$$

Движение механических систем *вблизи устойчивого положения равновесия* является весьма распространенный тип движения, представляющий собой так называемые *малые колебания*.

Уравнение движения системы, на которую не действуют другие силы, кроме потенциальных, вызванных отклонением от положения устойчивого равновесия (свободные колебания), в рассматриваемом нами одномерном случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3.4.1)$$

где введено обозначение  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Решение уравнения (1) в общем случае представляется в виде

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad \text{или} \quad x(t) = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (3.4.2)$$

Постоянные  $C_1, C_2$  определяются начальными условиями:

$$C_1 = x(0), \quad C_2 = \dot{x}(0)/\omega.$$

Постоянные в решении (2) связаны соотношениями

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -C_2/C_1.$$

Коэффициент  $A$  называют **амплитудой** колебаний, аргумент косинуса  $(\omega t + \alpha)$  – **фазой** колебаний, коэффициент  $\alpha$  – **начальной фазой**, величину  $\omega$  – **циклической частотой**, или просто **частотой**. Частота является *основной характеристикой свободных колебаний*. Она не зависит от начальных условий и полностью определяется свойствами механической системы как таковой. Однако это свойство лишь малых колебаний, связанное с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты. Если  $U(x_0)$  имеет минимум более высокого порядка, то это свойство исчезает.

Энергия малых колебаний

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2).$$

Подставив  $x = A\cos(\omega t + \alpha)$ , получим:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2, \quad \rightarrow \quad E \sim A^2, \quad (3.4.3)$$

т. е. *энергия малых колебаний пропорциональна квадрату амплитуды*. Из двух последних соотношений следует, что если энергия системы может быть представлена в виде

$$E = \alpha\dot{q}^2 + \beta q^2,$$

где  $q$  – какая-либо координата, однозначно характеризующая положение системы, то частота и период колебаний определяются соотношениями

$$\omega = \sqrt{\beta/\alpha}, \quad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\alpha/\beta}.$$

Реальные процессы движения тел (в том числе и колебания) происходят в некоторой среде, оказывающей сопротивление движению. Процесс движения в среде уже не является чисто механическим процессом: рассмотрение такого процесса требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния как среды, так и движущегося в ней тела. Однако в ряде случаев влияние среды на движение тела может быть достаточно точно учтено введением в уравнения движения дополнительного члена – "силы жидкого трения" зависящей только от скорости тела. Если на неподвижное тело не действует сила трения и скорость достаточно мала, то можно в разложении силы трения по степеням скорости ограничиться членом, пропорциональным скорости (нулевой член разложения при этом равен нулю). Таким образом, в ряде случаев силу трения  $F_{\text{тр}}$ , действующую на систему, можно представить в виде

$$F_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x} \quad (\alpha > 0).$$

Знак "минус" указывает на то, что эта сила действует в направлении, противоположном скорости. Тогда уравнение движения системы примет вид

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}. \quad (3.4.4)$$

Введем обозначения  $k/m = \omega_o^2$ ,  $\alpha/m = 2\lambda$ . Здесь  $\omega_o$  – частота свободных колебаний системы в отсутствие трения, величина  $\lambda$  – *показатель (или декремент) затухания*. Уравнение (4) теперь примет вид

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = 0. \quad (3.4.5)$$

Наибольший интерес представляет случай, когда  $\lambda < \omega_o$ . В этом случае решение можно представить в виде<sup>2</sup>:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$$

Логарифм отношения двух последовательных значений амплитуд

$$\theta = \ln \frac{Ae^{-\lambda t}}{Ae^{-\lambda(t+T)}} = \ln e^{\lambda T} = \lambda T$$

---

<sup>2</sup> В остальных случаях будет аperiodическое относительно быстро затухающее движение.

называется *логарифмическим декрементом затухания*. Логарифмический декремент затухания служит характеристикой затухающих колебаний: чем он больше, тем быстрее убывает амплитуда колебаний. Логарифмический декремент затухания можно определить непосредственно из наблюдений, измеряя последовательные значения амплитуд. Зная логарифмический декремент затухания и период колебаний, можно вычислить и декремент затухания  $\lambda$  из формулы  $\theta = \lambda T$ .

Время, за которое какая-либо величина уменьшается в  $e$  раз, называется *временем релаксации* этой величины. Время релаксации колебательной системы с затуханием равно  $1/\lambda$ , за время  $\tau = 1/\lambda$  амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Еще раз подчеркнем, что решения уравнения (5) во всех случаях описывают рано или поздно прекращающиеся (затухающие) движения.

**2. Вынужденные колебания.** Рассмотрим теперь колебания в системе, на которую действует некоторая переменная внешняя сила  $f(t)$ . Соответствующее уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t). \quad (3.4.6)$$

Ограничим рассмотрение случаем, представляющим самостоятельный интерес, когда вынуждающая сила является периодической и ее можно представить в виде  $f(t) = f \cos \gamma t$ . Уравнение движения тогда запишется как

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t. \quad (3.4.7)$$

В теории дифференциальных уравнений показано, что общее решение неоднородного уравнения (3.4.7) является суммой общего решения однородного уравнения (3.4.5) и частного решения уравнения (3.4.7).

Общее решение (3.4.5), как показано выше, стремится со временем к нулю. Другими словами, собственные колебания системы (ко-



лебания, вызванные выведением системы из равновесия) через определенное время затухнут, и останутся лишь колебания, вынуждаемые внешней периодической силой (вынужденные колебания). Вынужденные колебания будут определяться частным решением уравнения (7).

Зависимость координаты от времени в колебательных процессах часто удобно представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re}\{Ae^{i\omega t}\},$$

где  $A$  – комплексная амплитуда  $A = ae^{i\alpha}$ , модуль которой совпадает с обычной амплитудой, а аргумент – с начальной фазой. Такое представление значительно упрощает вычисления. При вычислениях можно вообще опускать знак взятия вещественной части ( $\operatorname{Re}$ ), используя эту операцию лишь при получении окончательных результатов.

Попытаемся найти частный интеграл уравнения (7) в виде  $x = Be^{i\gamma t}$  с последующим представлением  $B = be^{i\delta}$  и отделением мнимой части. Подстановка в уравнение (7q) приводит к равенству

$$e^{i\delta} \{(\omega_0^2 - \gamma^2) + i2\lambda\gamma\} = f/mb .$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \gamma^2) \cos \delta - 2\lambda\gamma \sin \delta = f/mb , \\ (\omega_0^2 - \gamma^2) \sin \delta + 2\lambda\gamma \cos \delta = 0 . \end{cases}$$

Решение данной системы дает

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} , \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2} . \quad (3.4.8)$$

Таким образом, установившееся вынужденное колебание описывается выражением

$$x = \operatorname{Re}\{Be^{i\gamma t}\} = b \cos(\gamma t + \delta), \quad (3.4.9)$$

где  $b$  и  $\delta$  определяются выражениями (8).

Величина амплитуды вынужденного колебания ( $b$ ) при фиксированной амплитуде внешней силы ( $f$ ) зависит от вынуждающей частоты ( $\gamma$ ), достигая максимума при определенной (резонансной для амплитуды) частоте ( $\gamma_{\text{рез}}$ ):

$$b_{\text{max}} = \frac{f}{2m\lambda\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} \quad \text{при} \quad \gamma_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2}. \quad (3.4.10)$$

Наличие трения приводит к диссипации энергии. Для поддержания движения система непрерывно поглощает энергию от источника внешней силы. Работа внешних сил

$$dA = (f \cos \gamma t) dx = (f \cos \gamma t) \dot{x} dt, \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \dot{x} f \cos \gamma t = I(\gamma),$$

где величиной  $I(\gamma)$  обозначено количество энергии, поглощаемое системой в единицу времени (интенсивность поглощения энергии). Умножив уравнение (7) на  $\dot{x}$ , получим:

$$m\dot{x}\ddot{x} + 2m\lambda\dot{x}^2 + m\omega_o^2 x\dot{x} = \dot{x} f \cos \gamma t = I(\gamma). \quad (3.4.11)$$

Энергия системы

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega_o^2 x^2).$$

Отсюда

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\omega_o^2 x\dot{x}. \quad (3.4.12)$$

Сравнивая выражения (11) и (12), получаем:

$$I(\gamma) = \frac{dE}{dt} + 2m\lambda\dot{x}^2. \quad (3.4.13)$$

Первый член в правой части равенства (13) – поглощаемая извне энергия, идущая на изменение энергии собственно системы, – отличен от нуля до тех пор, пока движение не установится. Второй член

– поглощаемая извне энергия, расходуемая на преодоление трения. При установившемся движении

$$I(\gamma) = 2m\lambda\dot{x}^2 = 2m\lambda\gamma^2 b^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

Среднее за период значение квадрата синуса равно  $1/2$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2},$$

поэтому среднее за период (а при достаточно большом количестве колебаний и среднее во времени) значение  $I(\gamma)$  определяется как

$$I_{\text{ср}}(\gamma) = mb^2\lambda\gamma^2. \quad (3.4.14)$$

Учитывая зависимость (8) амплитуды вынужденных колебаний от  $\gamma$ , найдем максимальное значение  $I_{\text{ср}}(\gamma)$  и соответствующую резонансную (для диссипации энергии) частоту:

$$I_{\text{max}} = \frac{f^2}{4m\lambda} \quad \text{при} \quad \gamma = \omega_0. \quad (3.4.15)$$

Обратим внимание на то, что частота внешнего воздействия  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ , соответствующая максимальному значению амплитуды вынужденных колебаний, и частота  $\gamma = \omega_0$  внешнего воздействия той же амплитуды, соответствующая максимальному поглощению системой энергии (или, что равносильно, максимальной диссипации энергии), не совпадают (попробуйте это объяснить).

Рассмотрим область вблизи резонансной частоты  $\gamma = \omega_0$ . Положим  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малая величина.

Тогда вблизи резонанса имеем:

$$b\gamma = \frac{f}{m} \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \simeq \frac{f}{2m} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \varepsilon^2}};$$

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + \varepsilon^2}. \quad (3.4.16)$$

Такой вид зависимости поглощения  $I(\varepsilon)$  от частоты называется *дисперсионным*. (Начертите эту зависимость. Величина  $\varepsilon$  может иметь положительные и отрицательные значения.) *Полушириной резонансной кривой* называют значение  $|\varepsilon|$ , при котором величина  $I(\varepsilon)$  уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением  $I(0)$ . Из соотношения (16) видно, что полуширина резонансной кривой равна показателю затухания  $\lambda$ . При уменьшении показателя затухания резонансная кривая  $I(\varepsilon)$  становится уже и выше, т. е. ее максимум становится более острым.

Для характеристики колебательных систем применяется иногда величина  $Q$ , называемая *добротностью*. По определению,

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Полная механическая энергия колебаний}}{\text{Диссипация энергии за период при резонансе}}.$$

Воспользовавшись полученными ранее соотношениями (8), (15) и (3) и полагая  $\gamma = \omega_0$ , получим:

$$Q = 2\pi \frac{kb^2/2}{I_{max}(2\pi/\omega_0)} = \frac{\omega_0}{2\lambda}.$$

## Глава 4

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

### ЛЕКЦИЯ 10

#### 4.1. Постулаты Эйнштейна. Первые следствия

Допущение об абсолютном характере времени, используемое при выводе преобразований Галилея, подразумевает возможность передачи сигналов с бесконечной скоростью. Однако такой возможности не существует. Наибольшая из известных скоростей – скорость света в вакууме, – как показали ее измерения, начавшиеся еще в XVII в., имеет конечное значение.

В настоящее время существует множество экспериментальных данных, которые показывают, что в релятивистской области преобразования Галилея неверны. Например, одна и та же движущаяся и находящаяся в покое нестабильная частица имеет разное время жизни; ни на одном ускорителе не удалось разогнать частицы до скоростей, превышающих скорость света в пустоте ( $c$ ); скорости света, испущенные неподвижным и движущимся источниками, оказываются равными и т. д.

Совокупность этих фактов можно объяснить, приняв следующие постулаты (Эйнштейн, 1905):

1. *Принцип относительности справедлив не только для механических (Галилей), но и для любых других физических явлений.*
2. *Существует универсальная предельная скорость распростра-*

*нения взаимодействий, численно равная скорости света в пустоте  $c$ .*

Приведем наиболее очевидные следствия из данных постулатов. Предельные скорости распространения взаимодействий в разных инерциальных системах отсчета одинаковы и равны универсальной для всех инерциальных систем отсчета конечной скорости распространения света в вакууме (иначе был бы нарушен первый постулат). Второй постулат ограничивает значение всех возможных в природе скоростей тел величиной  $c$ .

*Одновременность становится относительным понятием.* О ней теперь может идти речь лишь применительно к определенной системе отсчета. В качестве примера рассмотрим два световых сигнала, приходящих из середины поезда к его концам. В системе (поезд) эти события одновременны, а в системе (перрон) свет сначала достигает хвостового, а потом головного вагона.

Принцип относительности Эйнштейна является обобщением принципа относительности Галилея, распространяя его на явления любой природы. Однако имеется одно глубокое различие. В принципе относительности Эйнштейна переход к другим инерциальным системам не связывается с положением об абсолютном характере времени и каким-либо законом преобразования координат и скоростей. *Законы преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другим в теории Эйнштейна должны быть найдены заново.* Этой цели служит второй постулат Эйнштейна, утверждающий, что любые взаимодействия между телами в пустоте распространяются с универсальной конечной скоростью, равной скорости света и не зависящей от движения и состояния тел. Другими словами, *скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

**Замедление хода движущихся часов. Сокращение продольных размеров.** Рассмотрим распространение светового сигнала между двумя неподвижными в  $K'$ -системе зеркалами. Пусть

зеркала расположены ортогонально к оси  $y'$  (рис. 3). В  $K'$ -системе сигнал вдоль оси  $y'$  из точки  $A$  в точку  $B$  и обратно проходит за время  $\Delta t' = 2(y'_B - y'_A)/c$ .

Рассмотрим теперь распространение этого же сигнала в системе  $K$ . В системе  $K$  точки  $A$  и  $B$  движутся со скоростью  $V$ . К тому времени, когда сигнал достигнет точки  $B$ , последняя сместится вдоль оси  $X$  на величину  $V \cdot \Delta t_1$ , где  $\Delta t_1$  – время, за которое сигнал достигнет точки  $B$ .

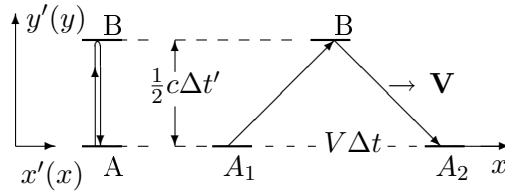


Рис. 3

Путь, пройденный сигналом, есть

$$c\Delta t_1 = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (V \cdot \Delta t_1)^2}.$$

Отсюда

$$\Delta t_1 = \frac{y_B - y_A}{c\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Такой же путь сигнал пройдет, возвращаясь в точку  $A$ . Следовательно, время возврата сигнала  $\Delta t_2$  равно  $\Delta t_1$ .

Время распространения сигнала от точки  $A$  до точки  $B$  и обратно

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2(y_B - y_A)}{c\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Сравнивая время от испускания до приема сигнала в системах  $K'$  и  $K$ , с учетом равенства поперечных размеров ( $y_B - y_A = y'_B - y'_A$ ), получаем

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (4.1.1)$$

Подчеркнем, что в  $K'$ -системе фиксировался промежуток времени между событиями (испускание и прием сигнала), которые происходят в одной и той же точке (координаты  $x'$  точек испускания

и приема сигнала совпадают). В системе  $K$  промежуток времени фиксировался между событиями, происходящими в разных точках (координаты  $x$  точек испускания и приема сигнала различны).

Промежуток времени между двумя событиями оказывается наименьшим по часам той системы отсчета, в которой эти события произошли "в одной точке", т. е. в системе, где пространственные координаты этих событий совпадали. По часам любой другой системы, движущейся относительно первой со скоростью  $\mathbf{V}$ , этот промежуток в  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$  раз больше.

Если два события произошли с одним и тем же телом, то промежуток времени между ними будет наименьшим по часам, движущимся вместе с телом. Это время принято называть *собственным временем*.

Прекрасное проявление этого эффекта наблюдается в мире элементарных частиц. Это объекты, которые мы можем наблюдать при скоростях близких к скорости света. Например, мюон, покоящийся по отношению к лабораторному наблюдателю, имеет среднее время жизни лишь  $t_0 \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$  с. Тогда за время своего существования мюоны, казалось бы, не могут преодолевать расстояний, значительно превышающих

$$ct_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} = 660 \text{ м.}$$

Однако мюоны, рождающиеся в космических лучах в верхних слоях атмосферы, способны преодолевать расстояние до поверхности Земли. Образно говоря, время жизни мюона отсчитывается по "встроенным в мюон" часам – по собственному времени, и это время совпадает со временем лабораторного наблюдателя лишь когда мюон и наблюдатель покоятся относительно друг друга. Поскольку мюоны движутся сквозь атмосферу со скоростями, близкими к скорости света, то для лабораторного наблюдателя среднее время жизни мюонов возрастает в соответствии с формулой (1). За это время мюон преодолевает расстояния, значительно превышающие 660 м.



*Течение времени оказывается зависящим от состояния движения. Не существует универсального мирового времени, и понятие промежутка времени между двумя физическими событиями оказывается относительным.*

Часто кратко (но недостаточно четко) формулируют: движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся. Такая формулировка порождает парадокс, будто об одной и той же паре часов  $A$  и  $A'$ , которые покоятся в системах  $K$  и  $K'$  соответственно, можно высказать два противоположных суждения: "часы  $A$  отстают от часов  $A'$ " и "часы  $A'$  отстают от часов  $A$ ". При этом возникло бы реальное противоречие, так как проверить, какие из этих двух часов отстают, можно прямым наблюдением и верным может быть только одно из приведенных выше суждений.

На самом деле парадокс кажущийся. Пусть в системе  $K$  имеется пара часов, расположенных в двух разных точках  $A(x_A = 0)$  и  $B(x_B = l)$ , а в системе  $K'$  — пара часов в точках  $A'(x'_{A'} = 0)$  и  $B'(x'_{B'} = -l')$ . В каждой системе часы синхронизированы (например, часы в точках  $A$  и  $B$  показывают одно и то же время). Пусть в начальный момент ( $t = 0$ ) по часам системы  $K$  точки  $A$  и  $A'$  находятся друг против друга и показания часов, расположенных в них, совпадают. Пусть в момент времени  $t_1$  по часам системы  $K$  часы в точке  $A'$  оказались против часов в точке  $B$ , а часы в точке  $B'$  — против часов в точке  $A$ . Таким образом, в начале координат системы  $K$  произошли два события: пространственное совпадение часов, расположенных в точках  $A$  и  $A'$  (для  $t = 0$ ), и пространственное совпадение часов, расположенных в точках  $A$  и  $B'$  (для  $t = t_1$ ). Так как оба этих события произошли в одной и той же точке системы  $K$ , то, согласно сказанному ранее, часы в точке  $A$  отсчитают минимальное время между этими событиями  $t_1$ , а часы в точке  $B'$  уйдут вперед. В начале координат системы  $K'$  также произошли два события: пространственное совпадение часов, расположенных в точках  $A$  и  $A'$  (для  $t = 0$ ), и пространственное совпадение часов, расположенных

в точках  $B$  и  $A'$  (для  $t = t_1$ ). Так как оба этих события произошли в одной и той же точке системы  $K'$ , то теперь минимальное время отсчитают часы в точке  $A'$ . Поскольку часы в точке  $B$  покажут время  $t_1$ , то часы в точке  $A'$  покажут время  $t_1\sqrt{1 - V^2/c^2}$ . Таким образом, часы в точке  $A'$  отстанут от часов в точке  $B$ , а часы в точке  $A$  отстанут от часов в точке  $B'$ . Так как речь идет о разных парах часов, то никакого противоречия нет.

Против данного рассуждения можно выдвинуть следующее возражение. Поскольку часы в системе  $K$  синхронизированы, то они должны давать в один и тот же момент времени одинаковые показания. То же самое можно сказать о часах системы  $K'$ . Поэтому если часы в точке  $A'$  отстают от часов в точке  $B$ , то в этот же момент времени все часы системы  $K'$  должны отставать от любых часов системы  $K$ , следовательно, часы в точке  $A$  не могут отставать от часов в точке  $B'$ . Однако это возражение основано на ошибке, связанной с некритическим употреблением понятия "момент времени", которое в теории относительности имеет смысл *только при указании определенной системы отсчета*. Как мы увидим далее, одному определенному значению  $t = const$  в системе  $K$  соответствует непрерывное множество значений  $t'$  в зависимости от значения координаты  $x$  и, наоборот, одному определенному значению  $t' = const$  соответствует непрерывное множество значений  $t$  в зависимости от координаты  $x'$ . Следовательно, когда часы системы  $K$  показывают одно и то же время, различные часы системы  $K'$  дают разные показания в зависимости от их местоположения и наоборот.

Таким образом, часы, расположенные в точке  $A'$ , будут отставать от всех часов, покоящихся в системе  $K$ , против которых они будут оказываться по ходу своего движения. Парадокс с отставанием движущихся часов мог бы, на первый взгляд, стать реальным, если бы часы в точке  $A'$ , двигаясь по какой-либо замкнутой траектории, в конце ее вновь оказались бы против часов, покоящихся в точке  $A$  (прямым сравнением в данном случае можно установить, какие ча-

сы отстанут). Но в этом случае теряется равноправие систем  $K$  и  $K'$ , так как система, связанная с часами в точке  $A'$ , хотя бы на некоторых участках траектории не будет инерциальной (на замкнутой траектории невозможно постоянное равномерное и прямолинейное движение на всех участках траектории). В общей теории относительности показано, что в этом случае отставание часов, расположенных в точке  $A'$ , от часов, покоящихся в точке  $A$ , будет реальным ("парадокс близнецов"). Доказательство справедливости отставания двигавшихся по замкнутой траектории часов имеет огромное значение.

Устраним сомнения, заключающиеся в том, что полученные выше результаты возможно справедливы лишь для описанных нами часов, в которых между зеркалами распространяется световой сигнал. Добьемся того, чтобы в какой-либо системе отсчета показания описанных часов и часов какой-либо другой конструкции совпадали. Если бы при переходе в другую систему отсчета их показания расходились, то мы бы получили способ, позволяющий отличать одну инерциальную систему отсчета от другой(их). Это противоречит первому постулату.

Так как в качестве "часов" движущейся системы отсчета может быть выбран любой периодический процесс, то это означает, что *все процессы (химические, биологические, физические и др.) независимо от их природы в системе  $K'$  окажутся замедленными по сравнению с такими же процессами в системе  $K$* . Речь, по существу, идет не о конкретных часах, а об общих свойствах времени.

Рассмотрим теперь тот же опыт, но с зеркалами, расположенными ортогонально к оси  $x'$  (рис. 4). В  $K'$ -системе  $\Delta t' = 2l'/c$ , где  $l' = x'_B - x'_A$  — длина стержня, на концах которого установлены неподвижные в  $K'$ -системе зеркала. В  $K$ -системе

$$\Delta t = \frac{l}{c - V} + \frac{l}{c + V} = \frac{2l}{c[1 - (V/c)^2]},$$

где  $l$  — длина (в  $K$ -системе) движущегося стержня с зеркалами.

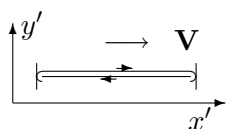


Рис. 4

С учетом соотношения (1) получим

$$l = l' \cdot \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (4.1.2)$$

*Продольные размеры движущегося тела сокращаются в  $\gamma$  раз по сравнению с размерами в системе, по отношению к которой тело покоится ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$ ).*

Таким образом, линейные размеры тела в направлении движения, которые в нерелятивистской механике считались неизменными (абсолютными), оказываются величинами *относительными*, т. е. зависящими от того, в какой системе отсчета они будут измерены.

Подчеркнем, что  $l' = x'_B - x'_A$ , где координаты концов стержня  $x'_A$  и  $x'_B$  могут быть измерены в один и тот же или разные моменты времени (ведь стержень покоится в  $K'$ -системе), а  $l = x_B - x_A$ , где координаты концов движущегося стержня  $x_A$  и  $x_B$  обязательно должны быть измерены в один и тот же (часам системы  $K$ ) момент времени.

Еще раз подчеркнем, что все инерциальные системы отсчета абсолютно равноправны и, если тело покоится в системе  $K$ , то его длина в системе  $K'$  будет меньше, чем в системе  $K$  в таком же отношении. Сокращение длины в направлении движения имеет чисто кинематический характер и не связано с появлением в теле каких-либо деформаций. В этом смысле можно говорить о недеформируемом теле в теории относительности. Само же понятие абсолютно твердого тела несовместимо с теорией относительности даже как некоторая идеализация, так как при этом появляется возможность передачи сигнала с бесконечно большой скоростью.

Заметим, что распространенные формулировки "кажущееся сокращение длины" и "кажущееся изменение хода часов" являются неудачными. Этими терминами стремятся подчеркнуть чисто кинематический характер данных изменений. Между тем изменение длины и хода часов представляет реальный и объективный факт, никак не связанный с оптическими или какими-либо другими иллюзиями наблюдателя. Естественно, все значения длины или промежутков времени, полученные в разных системах отсчета, равноправны. Все

они "правильные". Трудность понимания данных утверждений связана исключительно с нашей привычкой считать понятия длины и промежутка времени абсолютными, тогда как в действительности это понятия относительные. Бессмысленно ставить вопрос, какая длина или промежуток времени являются истинными. Понятия длины и промежутка времени так же относительны, как понятия покоя и движения.

#### 4.2. Преобразования Лоренца. Релятивистские преобразования скорости. Интервал. 4-векторы

Эйнштейном также были указаны преобразования координат и времени, которые, в соответствии с его постулатами, должны заменить преобразования Галилея. Они были к тому времени найдены Лармором и независимо от него – Лоренцом, как преобразования, которым должны подчиняться координаты и время при переходе к другим инерциальным системам отсчета, чтобы сохранить при этом неизменным вид уравнений электродинамики Максвелла в пустоте. Эти преобразования получили название преобразований Лоренца.

Пусть  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  – координаты некоторой точки в системах отсчета  $K$  и  $K'$  соответственно (рис. 5). Так как поперечные размеры не изменяются, то  $y' = y, z' = z$ . Продольная координата  $x$  складывается из расстояния  $Vt$  до начала отсчета  $O'$  системы  $K'$  и сокращенной длины движущегося отрезка  $O'x'$ :

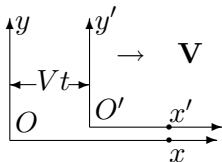


Рис. 5

$$x = Vt + \sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot x' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (4.2.1)$$

Обратное преобразование получается заменами  $x \leftrightarrow x', t \leftrightarrow t', V \leftrightarrow -V$  и имеет вид

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Подставив это выражение в соотношение (1), получим

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Обратное преобразование

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

В теории относительности некоторые комбинации величин достаточно часто повторяются. Для более компактного описания общеприняты следующие обозначения:

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Величина  $\beta$  представляет собой отношение скорости к скорости света, т. е. скорость, выраженную в единицах скорости света. Естественно, что всегда  $\beta \leq 1$ . Величина  $\gamma$ , всегда большая или равная единице носит название *лоренц-фактора* или *релятивистского фактора*.

Тогда прямые и обратные преобразования Лоренца удобно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right); \\ x' &= \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Эти преобразования симметричны, отличаясь, естественно, лишь знаком при  $V$ . Пространство и время потеряли свою обособленность. Пространственные и временные преобразования оказались взаимозависимыми. Время входит в формулы преобразования координат; координаты, в свою очередь, входят в формулы преобразования времени. Исчезло "абсолютное" время, одинаковое для всех систем отсчета. Его нельзя рассматривать безотносительно к системе отсчета.

Трёхмерное пространство и время должны быть заменены единым четырёхмерным пространством-временем.

Определим связь между компонентами скорости частицы в разных системах отсчета. Из соотношений (2) находим

$$dx = \gamma(dx' + Vdt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \gamma(dt' + \frac{V}{c^2}dx')$$

и релятивистский закон преобразования компонент скорости  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  в  $K$ -системе через компоненты скорости  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$  в  $K'$ -системе:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (4.2.3)$$

Обратное преобразование получается заменой  $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$ ,  $V \rightarrow -V$ :

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x V/c^2}. \quad (4.2.4)$$

Замечательно то, что при малых ( $V \ll c$ ) скоростях можно пренебречь величинами второго порядка малости, и тогда

$$x \simeq x' + Vt, \quad v_x \simeq v'_x + V, \quad t' \simeq t,$$

что совпадает с формулами преобразования Галилея. Релятивистская механика не отвергает преобразования Галилея, а включает их в истинные законы – преобразования Лоренца – как частный случай, справедливый при скоростях движения весьма малых по сравнению со скоростью света. В этом проявляется общая взаимосвязь между теорией относительности и законами нерелятивистской механики. Последние являются нерелятивистским приближением законов теории относительности. Иначе говоря, выполняется **принцип соответствия** – общее положение, согласно которому, *любая новая теория, претендующая на более глубокое описание и/или на более широкую область применимости, чем старая, должна включать последнюю как предельный случай.*

Из формул преобразования релятивистских скоростей непосредственно следует, что величины углов значения относительные и изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой. Поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha = v_y/v_x,$$

где  $\alpha$  – угол, образуемый вектором скорости частицы с осью  $x$ , из соотношений (3) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v' \sin \alpha' \sqrt{1 - \beta^2}}{v' \cos \alpha' + V}, \quad (4.2.5)$$

где проведены замены  $v'_x = v' \cos \alpha'$ ,  $v'_y = v' \sin \alpha'$ .

Итак, скорость света в пустоте в отличие от любых других скоростей приобрела статус абсолютной. Линейные же размеры и промежутки времени между событиями превратились из абсолютных величин в относительные. На "смену" им пришло понятие интервала, разделяющего два события.

*Интервалом*  $s_{12}$  между двумя событиями  $(t_1, \mathbf{r}_1)$  и  $(t_2, \mathbf{r}_2)$  называется величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}. \quad (4.2.6)$$

Прямой подстановкой легко убедиться, что данная величина *инвариантна относительно преобразований Лоренца* (1) и поворотов осей координат и, следовательно, *имеет одинаковое значение в любой инерциальной системе отсчета*.

Пусть двумя событиями являются положения частицы в два близких момента времени  $(t, \mathbf{r})$  и  $(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ . Соответствующий интервал между этими событиями будет  $ds = \sqrt{(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2}$ . Дадим теперь несколько отличное от прежнего определение собственного времени  $\tau$ , положив

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - (d\mathbf{r}/cdt)^2} \cdot dt = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \cdot dt = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot dt. \quad (4.2.7)$$



Ясно, что  $d\tau$  совпадает с обычным временем  $dt$  в системе отсчета, в которой частица покоится. Вместе с тем, собственное время  $d\tau$  удобно тем, что является инвариантом преобразований Лоренца (следует непосредственно из определения, где  $ds$  и  $c$  – инварианты).

В дальнейшем удобно от переменной  $t$  перейти к переменной  $x_o = ct$ ; при этом преобразования Лоренца примут вид

$$x_o = \gamma(x'_o + \frac{V}{c}x'), \quad x = \gamma(x' + \frac{V}{c}x'_o), \quad y = y', \quad z = z'. \quad (4.2.8)$$

Множество пространственных координат и моментов времени принято называть *четырёхмерным пространством-временем*. Точка в этом пространстве задается 4-радиус-вектором

$$r_\mu = (x_o, x, y, z) = (x_o, \mathbf{r}),$$

а расстояние между двумя точками – интервалом  $s_{12}$ :

$$s_{12} = \sqrt{(x_{o2} - x_{o1})^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}.$$

В дальнейшем будут рассматриваться и другие 4-векторы. Набор величин

$$A_\mu = (A_o, A_x, A_y, A_z) = (A_o, \mathbf{A})$$

называется *4-вектором*, если при вращениях и преобразованиях Лоренца величины  $A_\mu$  преобразуются так же, как и компоненты  $r_\mu$ , т. е.

$$A_o = \gamma(A'_o + \frac{V}{c}A'_x), \quad A_x = \gamma(A'_x + \frac{V}{c}A'_o), \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z. \quad (4.2.9)$$

Квадрат 4-вектора строится аналогично квадрату интервала, т. е.  $A_\mu^2 = A_o^2 - \mathbf{A}^2$ , и является инвариантом преобразований Лоренца. Величина  $A_\mu B_\mu = A_o B_o - \mathbf{A} \mathbf{B}$  может быть названа скалярным произведением 4-векторов  $A_\mu$  и  $B_\mu$  и также является инвариантом преобразований Лоренца.

Например, отношение  $u_\mu = dr_\mu/d\tau$  является 4-вектором. Данную величину ( $u_\mu$ ) называют *4-скоростью*. С учетом соотношения (2) компоненты  $u_\mu$  имеют вид

$$u_\mu = (u_o, \mathbf{u}) = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (4.2.10)$$

а квадрат 4-скорости

$$u_\mu^2 = u_o^2 - \mathbf{u}^2 = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 - \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 = c^2. \quad (4.2.11)$$

В последней формуле инвариантность квадрата 4-вектора скорости особенно наглядна.

Необходимо подчеркнуть, что введение представления о четырехмерном пространстве имеет достаточно формальный характер. Оно отнюдь не равнозначно утверждению существования реального пространства четырех измерений. Тем не менее введение временной координаты  $x_o$  имеет глубокий физический смысл, выражая неразрывную связь пространства и времени, которые до релятивистской механики воспринимались совершенно обособленно.

Геометрия задается выражением для расстояния между двумя точками. В евклидовом мире расстояние между двумя точками с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  определяется выражением

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

В четырехмерном мире время и координаты любого события  $(t, x, y, z)$  также задают нам "мировую" точку и можно ввести понятие расстояния между двумя мировыми точками, называемое *интервалом*<sup>1</sup>. Оно в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ &= c^2(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

---

<sup>1</sup> Открытие инвариантности интервала относительно преобразований Лоренца принадлежит А. Пуанкаре.

Так как в выражение (12) временная и пространственная части входят с разными знаками, то было предложено такое пространство называть *псевдоевклидовым*.

Выражение (12) для интервала не следует из каких-либо более общих принципов. Оно само выражает *фундаментальный принцип современной физики – пространство и время едино, и геометрия его определяется интервалом (6)*.

Вот этот качественный шаг в объединение пространства и времени в одно целое и введение соответствующей геометрии и есть, по существу, главное содержание теории относительности. Этим открытием мы обязаны также А. Пуанкаре и Г. Минковскому. Им первым принадлежит осознание того, что все физические процессы протекают в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова. Эйнштейн очень высоко отозвался о работах Минковского, "... без которых общая теория относительности... , быть может, оставалась бы в зачаточном состоянии".

*Собственное время.* Как следует из вышесказанного, с каждым материальным телом связано его собственное время (время в системе отсчета жестко связанной с телом). Собственное время не имеет отношения к системам отсчета, с помощью которых описывается движение тела. Собственное время есть *величина абсолютная*. Рассмотрим случай равномерного и прямолинейного движения тела со скоростью  $u$  относительно некоторой системы  $K$ . Свяжем с телом систему  $K^*$ ; время в этой системе собственное, которое мы будем, как и ранее, обозначать через  $\tau$ . Тогда, в соответствии с формулой (4.1.1), промежуток времени между двумя событиями в системе  $K^*$

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - u^2/c^2} (t_2 - t_1),$$

где  $t_2 - t_1$  – промежуток времени между этими же событиями в  $K$ -системе. Так как  $u = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ , где  $x_1, x_2$  – координаты этих событий в  $K$ -системе соответственно, то

$$(\tau_2 - \tau_1)^2 = \left(1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2(t_2 - t_1)^2}\right) (t_2 - t_1)^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2}. \quad (A)$$

Пусть теперь некая инерциальная система отсчета  $K'$  движется относительно  $K$ -системы со скоростью  $V$  (оси систем  $K, K'$  сонаправлены с осями  $K^*$ -системы). Тогда из преобразований Лоренца

$$(x_2 - x_1)^2 = \gamma^2[(x'_2 - x'_1) + V(t'_2 - t'_1)]^2 \quad \text{и} \quad (t_2 - t_1)^2 = \gamma^2[(t'_2 - t'_1) + \frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1)]^2.$$

Подставив эти выражения в соотношение (A), получим

$$(\tau_2 - \tau_1)^2 = (t'_2 - t'_1)^2 - \frac{(x'_2 - x'_1)^2}{c^2}.$$

Сравнивая последнее с выражением (А) приходим к выводу, что интервал собственного времени выражается совершенно одинаково и имеет одно и то же значение в любой системе отсчета. Величины, не меняющиеся при перемене системы отсчета, называют инвариантами. (Подробнее см. в Приложении I). Очевидно также, что инвариантом является и собственная длина  $l_0 = \gamma l$ .

Формулу  $d\tau = dt\sqrt{1 - (u/c)^2}$  можно применять и к неравномерным движениям:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}} dt.$$

В четырехмерном пространстве

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Отсюда следует и инвариантность интервала

$$S_{1,2} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}.$$

## ЛЕКЦИЯ 11

### 4.3. Релятивистские энергия и импульс

Нерелятивистский импульс  $m\mathbf{v} = m d\mathbf{r}/dt$  не содержит каких-либо ограничений по скорости и не является векторной компонентой какого-либо 4-вектора. Поэтому закон сохранения полного нерелятивистского импульса замкнутой системы, строго говоря, нарушается при переходах к другим инерциальным системам отсчета. Естественное релятивистское обобщение импульса состоит в замене скорости  $\mathbf{v}$  на 4-скорость  $u_\mu$  (7.5). Тогда 4-импульс

$$p_\mu = (p_o, \mathbf{p}) = mu_\mu; \quad p_o = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.3.1)$$

Все экспериментальные данные подтверждают, что при релятивистских соударениях и распадах имеет место закон сохранения полного 4-импульса замкнутой системы:

$$\sum_i (p_\mu)_i = \sum_j (p'_\mu)_j, \quad (4.3.2)$$

где суммирование в левой части равенства (по  $i$ ) проводится по исходным частицам (до распада или столкновения), а суммирование справа (по  $j$ ) – по конечным частицам (после распада, соударения).

Выясним, какой физический смысл имеет скалярная компонента  $p_o$  4-импульса  $p_\mu$ . Из  $p_\mu^2 = p_o^2 - \mathbf{p}^2 = const$  следует:

$$c \frac{dp_o}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = \mathbf{F}\mathbf{v},$$

или

$$d \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = \mathbf{F}\mathbf{v} dt = dA.$$

В соответствии с формулой (2.6.1) элементарная работа ( $dA$ ) над частицей равна приращению кинетической энергии ( $d\varepsilon_k$ ) последней.

Полагая кинетическую энергию неподвижной частицы равной нулю, получаем:

$$\varepsilon_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (4.3.3)$$

При малых скоростях ( $v \ll c$ ) значение  $\varepsilon_k$  совпадает с выражением для нерелятивистской кинетической энергии:

$$\varepsilon_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} - mc^2 \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{mv^2}{2}.$$

Естественно при этом полагать значение

$$\varepsilon_0 = mc^2 \quad (4.3.4)$$

равным энергии покоящейся частицы (энергии покоя).

Тогда полная релятивистская энергия свободной частицы ( $\varepsilon$ ) может быть определена как

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2, \quad d\varepsilon = d\varepsilon_k. \quad (4.3.5)$$

4-вектор  $p_\mu$  теперь можно записать в виде  $p_\mu = (\varepsilon/c, \mathbf{p})$ , употребительно и название "4-вектор энергии-импульса".

Закон сохранения для замкнутых систем полного 4-вектора энергии-импульса (2) естественным образом обобщает нерелятивистские законы сохранения импульса и энергии.

Сравнивая компоненты 4-вектора энергии-импульса

$$\frac{\varepsilon}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \quad \text{и} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \quad (4.3.6)$$

получим соотношения, часто используемые при решении различных задач

$$\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{v}/c^2, \quad \text{или} \quad \mathbf{p}c = \varepsilon\mathbf{v}/c.$$

Другие, не менее часто используемые выражения получаем, исходя из инвариантности величины  $p_\mu^2$ . Тогда

$$p_\mu^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \frac{\varepsilon'^2}{c^2} - \mathbf{p}'^2 = const.$$

Для определения константы свяжем штрихованную систему с частицей, тогда  $\varepsilon' = \varepsilon_o = mc^2$ ,  $\mathbf{p}' = 0$  и, следовательно,

$$p_\mu^2 = m^2 c^2, \quad \text{или} \quad \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (4.3.7)$$

Из соотношений (6)–(7) в нерелятивистском пределе  $v \ll c$  получим

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots \quad \text{при} \quad v \ll c \quad \varepsilon_k \rightarrow \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.3.8)$$

а в ультрарелятивистском пределе при  $c - v \ll c$ , или  $\varepsilon \gg mc^2$

$$\varepsilon = |\mathbf{p}| \cdot c + \frac{m^2 c^3}{2|\mathbf{p}|} + \dots \quad \rightarrow \quad \varepsilon_k = \varepsilon - mc^2 \simeq \varepsilon. \quad (4.3.9)$$

Так как величины  $\varepsilon/c$  и  $\mathbf{p}$  – компоненты 4-вектора  $p_\mu$ , то законы их преобразования нам уже известны (см. (4.2.9)):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \gamma(\varepsilon' + Vp'_x), \quad p_x = \gamma(p'_x + \frac{V}{c^2}\varepsilon'), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z; \\ \varepsilon' &= \gamma(\varepsilon - Vp_x), \quad p'_x = \gamma(p_x - \frac{V}{c^2}\varepsilon), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Из-за различия в сокращении продольных и поперечных размеров определение центра инерции (2.4.1) не является релятивистски инвариантным в том смысле, что в разных системах отсчета центр инерции может занимать различное положение относительно частиц системы. В релятивистском случае нахождение *центра инерции* мало конструктивно. Однако использование в релятивистской механике *систем центра инерции* значительно упрощает описание ряда вопросов и решение многих прикладных задач. *При этом под системой центра инерции следует понимать систему отсчета, в которой суммарный импульс частиц системы равен нулю.*

Отметим, что *релятивистская сила*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3 \frac{(\mathbf{a}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2}, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

в общем случае не совпадает по направлению с ускорением и оказывается зависящей не только от ускорения ( $\mathbf{a}$ ), но и от скорости ( $\mathbf{v}$ ).

В частности,  $\mathbf{F} = m\gamma^3\mathbf{a}$  при  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$  и  $\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a}$  при  $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$ . Нельзя поэтому в релятивистском подходе ввести понятие массы как некоторого "коэффициента пропорциональности" между силой и ускорением; в *релятивистской теории сила неизбежно зависит от скорости*.

Иногда определяют релятивистский импульс как  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , где "релятивистская масса"  $m = \gamma m_0$ . Это порождает ряд недоразумений. Сомножитель  $\gamma$  появляется из 4-скорости, относится к 4-вектору энергии–импульса в целом, ко всем его компонентам, а не только к массе. Представляется более обоснованным полагать, что у частицы есть релятивистски инвариантная характеристика – масса (возможно, и равная нулю).

#### 4.4. Фотон. Аберрация света, Эффект Доплера

Согласно полевой теории, всякое взаимодействие осуществляется через посредство соответствующих полей. В классической электродинамике процесс взаимодействия вещества с электромагнитным полем – это процесс взаимодействия вещества с электромагнитными волнами. Электромагнитная волна представляется как суперпозиция *монохроматических волн*, каждая из которых характеризуется определенной длиной (частотой) и амплитудой. В частности, свет, как это следует из классической электродинамики, представляет из себя электромагнитные волны с длинами, воспринимаемыми человеческим глазом, т. е. приблизительно от 400 до 750 нм. Волновые свойства света были установлены задолго до уяснения его электромагнитной природы (явления интерференции и дифракции света).

Обычно, кроме видимой области, в световой диапазон включают и примыкающие области спектра электромагнитных волн – инфракрасную и ультрафиолетовую. Световая область не имеет принципиальных отличий от других областей спектра электромагнитных



волн, однако именно в световом диапазоне начинает проявляться *квантовый характер электромагнитного поля*.

Впервые (1900 г.) гипотезу о дискретности электромагнитного излучения высказал М. Планк. Согласно этой гипотезе, при излучении или поглощении света веществом энергия поля может возрасти или убывать только порциями величиной  $\varepsilon = \hbar\omega$ , где  $\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-27}$  – постоянная Планка ( $h$ ), поделенная на  $2\pi$ ,  $\omega$  – угловая частота. Другими словами, вещество может поглощать и излучать энергию только конечными порциями.

Следующий шаг был сделан А. Эйнштейном, выдвинувшим (1905 г.) гипотезу *световых квантов*, согласно которой *поле электромагнитного излучения состоит из набора элементарных полей, каждое из которых обладает свойствами частицы*, получивших название световых квантов, или фотонов. Фотон при этом обладает энергией  $\varepsilon = \hbar\omega$  и импульсом  $p = \hbar\omega/c$ .

Возможность существования частиц с указанными свойствами содержится и в теории относительности.

Действительно, соотношения (4.3.6) совместимы в пределе  $v \rightarrow c$ ,  $m \rightarrow 0$ ; при этом энергия частицы

$$\varepsilon = |\mathbf{p}| c. \quad (4.4.1)$$

Таковыми частицами с нулевой массой и существующими только при движении со скоростью света являются фотоны ( $\gamma$ ). Из соотношения (1) следует, что квадрат 4-импульса таких частиц  $(p_\gamma)_\mu^2$  равен нулю:

$$(p_\gamma)_\mu = \left( \frac{\varepsilon}{c}, \mathbf{p} \right) = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \rightarrow (p_\gamma)_\mu^2 = 0. \quad (4.4.2)$$

До недавнего времени полагали, что нулевой массой обладают также нейтрино и антинейтрино, крайне трудно "уловимые" частицы. Эксперименты последних нескольких лет, в том числе и эксперименты, проведенные в этом году (лаборатории ТЛ2 (Япония) и Fermilab возле Чикаго) показали, что нейтрино обладают хотя и крайне малой, но ненулевой массой  $m_\nu \simeq 0,59 \cdot 10^{-34}$  г.

Масса нейтрино важна для предположения объяснения феномена скрытой массы в космологии, так как, несмотря на её малость, концентрация нейтрино во Вселенной возможно достаточно высока, чтобы существенно повлиять на среднюю плотность.

Нейтрино малой энергии чрезвычайно слабо взаимодействуют с веществом; такие нейтрино имеют в воде длину свободного пробега порядка  $10^{18}$  м (около 100 св. лет). Также известно, что каждую секунду через площадку на Земле в  $1 \text{ см}^2$  проходит около  $6 \cdot 10^{10}$  нейтрино, испущенных Солнцем. Однако никакого воздействия, например, на тело человека они не оказывают. В то же время нейтрино высоких энергий успешно обнаруживаются по их взаимодействию с мишенями.

Нейтрино посвящена песня Тимура Шаова — «Свободная частица».

Электромагнитная волна частоты  $\omega$ , по сути, является набором фотонов с энергиями  $\varepsilon = \hbar\omega$ .

Если в  $K'$ -системе испускается фотон с энергией  $\varepsilon' = \hbar\omega'$  под углом  $\varphi'$  к оси  $x'$ , то его импульс

$$\mathbf{p}' = \frac{\varepsilon'}{c}(\cos \varphi', \sin \varphi', 0).$$

Согласно (4.3.10), в  $K$ -системе энергия и импульс имеют вид

$$\varepsilon = \hbar\omega = \gamma\varepsilon'(1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'), \quad \mathbf{p} = \frac{\varepsilon'}{c}(\gamma(\cos \varphi' + \frac{V}{c}), \sin \varphi', 0).$$

Отсюда получаем

$$\omega = \gamma\omega'(1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'), \tag{4.4.3}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\sin \varphi' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{\cos \varphi' + V/c}, \rightarrow \cos \varphi = \frac{\cos \varphi' + V/c}{1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'} \tag{4.4.4}$$

Формулы обратного перехода от системы  $K$  к системе  $K'$  получаются заменой "штрихованных" выражений на "нештрихованные" и наоборот, а также  $V$  на  $-V$ .

Формула (4) отражает явление *абберации света* — изменения видимого положения светил на небесной сфере, обусловленного конечностью скорости света и движением наблюдателя относительно светил вследствие вращения Земли (суточная абберация), обращения Земли вокруг Солнца (годовая абберация) и перемещения Солнечной системы в пространстве (вековая абберация света).

Абберация света с достаточной точностью может быть описана и в рамках нерелятивистской механики<sup>2</sup>. Если в формуле (1.3.6),

<sup>2</sup> Как и физические явления, зависящие от первой степени отношения  $V/c$ .

определяющей в нерелятивистской механике изменение направления скорости при переходе в другую систему отсчета, заменить  $v'$  на  $c$ , то получим выражение, отличающееся от формулы (4) лишь множителем  $\sqrt{1 - (V/c)^2}$  и являющееся ее первым приближением. В большинстве случаев при астрономических наблюдениях влияние множителя  $\sqrt{1 - (V/c)^2}$  лежит за пределами точности измерений и он просто не учитывается.

Формула (3) определяет *релятивистский эффект Доплера* – изменение воспринимаемой частоты световых (электромагнитных) колебаний, вызываемое относительной скоростью источника и приемника. Для практического применения наиболее важна формула

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{V}{c} \cos \varphi\right),$$

которую удобнее представить в виде

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \varphi}. \quad (4.4.5)$$

Здесь частота сигнала, воспринимаемого приемником наблюдателя, выражена непосредственно через измеряемый наблюдателем угол  $\varphi$  между вектором скорости  $\mathbf{V}$  источника в момент излучения сигнала и вектором, направленным от точки излучения к точке приема.

Заметим, что при  $\cos \varphi = 0$ , т. е. когда направление наблюдения перпендикулярно скорости источника в момент испускания сигнала, имеем  $\omega \neq \omega'$  – так называемый *поперечный эффект Доплера*, присущий только электромагнитным волнам и порождаемый разницей в ходе времени источника и приемника излучения.

Экспериментальное изучение эффекта Доплера с большой точностью подтвердило правильность релятивистских соотношений. Эффект Доплера играет большую роль во многих областях физики и широко используется в технике.

## ЛЕКЦИЯ 12

### 4.5. Распады и соударения в релятивистской механике. Эффект Комптона. Метод встречных пучков

Релятивистские свойства наиболее полно проявляются при исследовании мира *элементарных частиц*. Элементарными принято называть мельчайшие известные нам частицы. По смыслу понятия элементарности термин "элементарная частица" должен был бы означать простейшую, далее неразложимую частицу. Частицы, именуемые нами элементарными, не вполне отвечают такому определению, поэтому данное их наименование в определенной мере условно. Как правило, к элементарным частицам относят все мельчайшие частицы, за исключением атомных ядер с атомным номером  $A \geq 2$ . *Большинство элементарных частиц нестабильно и постепенно превращается в более легкие частицы.* Тем самым требование неразложимости элементарных частиц явно нарушено. В то же время неверно было бы утверждать, что элементарные частицы состоят из продуктов своего распада. Частицы-продукты возникают в момент самого распада. Кроме того, одна и та же элементарная частица может распадаться на различные конечные элементарные частицы.

Из нейтральных элементарных частиц стабильны только фотон ( $\gamma$ ), нейтрино ( $\nu$ ) и антинейтрино ( $\bar{\nu}$ ). Из частиц, обладающих зарядом, стабильны протон ( $p$ ) и электрон ( $e$ ), а также соответствующие им античастицы: антипротон ( $\bar{p}$ ) и позитрон ( $e^+$ ). Стабильность также может сохранять нейтрон ( $n$ ), когда он связан в ядре; связанные нейтроны и протоны (общее название нуклоны) образуют ядра атомов. Свободный же нейтрон распадается по реакции  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$  при среднем времени жизни  $\sim 15$  мин.

Одной из отличительных особенностей элементарных частиц является также их способность рождаться и уничтожаться при взаимных столкновениях, что проявляется тем сильнее, чем выше энергия сталкивающихся частиц.

**Распад частиц.** Рассмотрим самопроизвольный процесс распа-

да некоторой частицы массы  $m$ . В соответствии с законом сохранения 4-импульса имеем:

$$p_\mu = \sum_j (p_\mu)_j, \quad \rightarrow \quad m^2 c^2 = \left( \sum_j \frac{\varepsilon_j}{c} \right)^2 - \left( \sum_j \mathbf{p}_j \right)^2. \quad (4.5.1)$$

Таким образом, массу нестабильной частицы (реакции типа  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ,  $Z \rightarrow e^+ + e^-$ ) можно определить, измеряя энергии и импульсы продуктов распада.

Рассмотрим процесс распада в системе отсчета, связанной с распадающейся частицей (в системе центра инерции). Из соотношения (1) получаем:

$$m c^2 = \sum_j \varepsilon_j = \sum_j (m_j c^2 + \varepsilon_{k_j}) \quad \rightarrow \quad m > \sum_j m_j .$$

*Масса распадающейся частицы больше массы частиц распада.* Отсюда вытекает, что *стабильные свободные элементарные частицы (электрон, протон) не могут излучать*<sup>3</sup>.

**Неупругие столкновения.** Так называются столкновения, сопровождающиеся потерей суммарной энергии сталкивающихся частиц. Такие столкновения приводят к рождению каких-либо частиц и к возможной гибели одной или обеих сталкивающихся частиц. В актах соударения, как правило, лишь часть энергии сталкивающихся частиц может быть использована для порождения каких-либо других частиц. Если исходные частицы до столкновения имели отличный от нуля суммарный импульс ( $\sum \mathbf{p}_i$ ), то таким же суммарным импульсом должны обладать конечные (оставшиеся после столкновения) частицы. Поэтому часть начальной энергии исходных частиц переходит в кинетическую энергию конечных частиц.

Единственный случай, когда вся энергия может быть использована в столкновениях для образования конечных частиц, имеет место, когда суммарный импульс сталкивающихся частиц равен нулю (столкновения в системе центра инерции сталкивающихся частиц).

---

<sup>3</sup> Это не относится к сложным стабильным образованиям типа атомов и молекул.

Эта идея (приблизить условия, в которых проводятся эксперименты со столкновениями частиц, к условиям столкновений в системе центра инерции) лежит в основе так называемого *метода встречных пучков*. В этом случае возможно существенное уменьшение кинетической (и, разумеется, полной) энергии разгоняемых частиц, необходимой для осуществления конкретной реакции.

Ускоритель со встречными электрон-электронными пучками впервые был создан в 1964 г. в Новосибирске. В нем электроны разгонялись до энергий  $\simeq 150$  МэВ. Для получения тех же эффектов при столкновениях с покоящимися электронами энергию разгоняемых электронов пришлось бы увеличить в  $\simeq 600$  раз, а диаметр ускорителя – в десятки тысяч раз.

Опыты, связанные со столкновениями частиц, как правило, производятся на специально создаваемых установках. Условия и задачи эксперимента подчас таковы, что весьма затруднительно (а иногда и просто невозможно) обеспечить столкновение частиц в системе центра инерции. В этом случае особенно важно определение минимальной энергии, которой должны обладать сталкивающиеся частицы, чтобы могла осуществиться определенная реакция. От этого зависят энергетические и прочие параметры установки. *Минимально потребная энергия для определенной реакции, осуществляемой в конкретных условиях эксперимента, получила название пороговой энергии (для конкретных условий эксперимента)*. Для ее определения лучше всего воспользоваться инвариантностью квадрата 4-вектора:

$$\left(\sum_i (p_\mu)_i\right)^2 = \left(\sum_j (p_\mu)_j\right)^2 = \left(\sum_j (p_\mu^\circ)_j\right)^2.$$

Здесь  $(p_\mu^\circ)_j$  относится к величинам, определяемым в системе центра инерции сталкивающихся частиц. Минимальная (пороговая) энергия в системе центра инерции равна  $\sum_j m_j c^2$ , и задача сводится к

решению уравнения

$$\left(\sum_i (p_\mu)_i\right)^2 = \left(\sum_j m_j c\right)^2. \quad (4.5.2)$$

Выясним, каково значение пороговой энергии в реакции  $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ , когда движущийся протон (искомая энергия  $\varepsilon_1$ ) сталкивается с неподвижным протоном ( $\varepsilon_2 = m_p c^2$ ), и в результате образуется дополнительная пара протон-антипротон (беватрон в Беркли):

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)_\mu^2 &= 2m_p^2 c^2 + 2\varepsilon_1 m_p = (4m_p c)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon_1 &= 7m_p c^2, \quad \varepsilon_{k_1} = \varepsilon_1 - m_p c^2 = 6m_p c^2 \approx 5,6 \text{ ГэВ}. \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы при столкновении движущегося протона со свободным покоящимся протоном произошла указанная выше реакция, необходимо, чтобы движущийся протон обладал кинетической энергией не менее  $\approx 5,6$  ГэВ. Для этой реакции в системе центра масс минимальная кинетическая энергия каждого из протонов составила бы всего  $m_p c^2 \simeq 0,94$  ГэВ.

При упругих столкновениях, в отличие от неупругих, суммарные энергия и импульс сталкивающихся частиц остаются неизменными; каких-либо новых частиц упругие столкновения не порождают. В качестве примера рассмотрим *эффект Комптона, или комптоновское рассеяние* – упругое рассеяние электромагнитного излучения (фотонов) на свободных или слабо связанных электронах. При этом суммарные энергия и импульс сталкивающихся частиц остаются неизменными. Впервые такие упругие соударения исследовал (1923 г.) Комптон. Все энергетические и угловые характеристики эффекта Комптона полностью определяются законом сохранения 4-импульса:

$$(p_\gamma + p_e)_\mu = (p'_\gamma + p'_e)_\mu.$$

Последнее выражение представим в виде

$$(p'_e)_\mu = (p_\gamma + p_e - p'_\gamma)_\mu.$$

Возведя это соотношение в квадрат, с учетом того что  $(p_e)_\mu^2 = (p'_e)_\mu^2$  и  $(p_\gamma)_\mu^2 = (p'_\gamma)_\mu^2 = 0$ , получаем:<sup>4</sup>

$$(p'_\gamma)_\mu(p_\gamma + p_e)_\mu = (p_\gamma)_\mu(p_e)_\mu. \quad (4.5.3)$$

Раскрыв выражение (3), получим

$$\frac{\varepsilon'_\gamma(\varepsilon_e + \varepsilon_\gamma)}{c^2} - \mathbf{p}'_\gamma(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\gamma) = \frac{\varepsilon_e\varepsilon_\gamma}{c^2} - \mathbf{p}_e\mathbf{p}_\gamma. \quad (4.5.4)$$

Полагая электрон до столкновения неподвижным ( $\mathbf{p}_e = 0$ ,  $\varepsilon_e = m_e c^2$ ), из соотношения (6) получим

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_e\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_e + \varepsilon_\gamma(1 - \cos\vartheta)},$$

или

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \varepsilon(1 - \cos\vartheta)},$$

где  $\omega$  и  $\omega'$  – частота фотона до и после рассеяния,  $\vartheta$  – угол рассеяния фотона,  $\varepsilon = \hbar\omega/m_e c^2$  – энергия первичного фотона в единицах  $m_e c^2 \simeq 511$  кэВ. Используя соотношение  $\lambda = 2\pi c/\omega$  и введя  $\bar{\lambda}_e = \hbar/m_e c \approx 4 \cdot 10^{-11}$  см, так называемую *комptonовскую длину волны электрона*, получаем

$$\lambda' - \lambda \equiv \Delta\lambda = 2\pi\bar{\lambda}_e(1 - \cos\vartheta). \quad (4.5.5)$$

Комптонское рассеяние, в результате которого длина волны излучения увеличивается и в однозначной связи с этим увеличением находится энергия отдачи электронов, не может быть объяснено классической волновой теорией света. Обнаружение данного эффекта явилось одним из важнейших подтверждений квантовой теории.

Комптон проводил опыты по рассеянию рентгеновских и  $\gamma$ -лучей. Для излучения малых энергий ( $\hbar\omega/m_e c^2 \ll 1$ ) формула (5)

<sup>4</sup> Наиболее распространенный и рациональный прием: вместо решения системы, соответствующей равенствам компонент соотношения  $\sum_i (p_\mu)_i = \sum_j (p_\mu)_j$ , данное соотношение "перекомпоновывают" к наиболее рациональному для конкретной задачи виду, а затем возводят в квадрат.



переходит в классическое выражение  $\lambda' = \lambda$ . Видимый свет обычно не претерпевает комптоновского рассеяния, так как электрон можно считать свободным, если энергия первичного кванта заметно превышает энергию связи электрона в атоме.

Приведенные выше формулы обобщаются и на случай рассеяния фотона на движущемся электроне. При этом  $\Delta\lambda$  зависит от начальной скорости электрона. При рассеянии на электронах достаточно большой энергии энергия фотонов может возрастать.

Если рассмотреть **лобовое** соударение фотона с ультрарелятивистским электроном (см. формулу (4.3.9)), то для рассеянного назад ( $\vartheta = \pi$ ) фотона из соотношения (4) получим

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma(\varepsilon_e + c |\mathbf{p}_e|)}{2\varepsilon_\gamma + \varepsilon_e - c |\mathbf{p}_e|} \approx \frac{x}{x+1}\varepsilon_e, \quad x = \frac{4\varepsilon_\gamma\varepsilon_e}{m_e^2c^4}. \quad (4.5.6)$$

При  $\varepsilon_e \simeq 100$  ГэВ и  $\varepsilon_\gamma \simeq 2,5$  эВ (видимый свет),  $x \simeq 4$  и  $\varepsilon'_\gamma \simeq 80$  ГэВ, т. е. электрон передает фотону порядка 80 % своей энергии. Метод используется для получения фотонных пучков высоких энергий.

Ускоритель SLAG (Стэнфорд, 1996); электроны с энергией  $\varepsilon_e = 46$  ГэВ сталкивались с лазерными фотонами с энергией  $\varepsilon_\gamma = 1,2$  эВ (инфракрасный лазер на неодимовом стекле). При этом  $x = 0,85$  и  $\varepsilon'_\gamma = 21$  ГэВ. Электрон передает фотону более 45 % своей энергии, увеличивая энергию фотона в  $\simeq 17,5 \cdot 10^9$  раз.

Отметим, что физика процесса рассеяния фотонов на других заряженных частицах, например на протонах, ничем не отличается от описанной.

## ЛЕКЦИЯ 13

### 4.6. Энергия связи. Реакции деления и синтеза атомных ядер

Чтобы разложить стабильную систему на составные части (например, молекулы на атомы, атомы на ядро и электроны, ядро на нейтроны и протоны и т. д.) надо совершить определенную работу.

*Энергией связи называют минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы разложить систему на не взаимодействующие между собой ("бесконечно удаленные друг от друга") составные части. Если тело можно "растащить" на разные составные части, то речь будет идти об энергии связи определенного процесса (реакции).*

Рассмотрим стабильную систему, обладающую "запасом прочности", например кристалл, молекулу или атомное ядро. Имеем очевидное равенство:

$$\varepsilon + \varepsilon_{\text{св}} = \sum_i \varepsilon_i, \quad (4.6.1)$$

где  $\varepsilon$  – энергия исходной системы;  $\varepsilon_{\text{св}}$  – энергия связи (минимальная работа по разложению системы);  $\varepsilon_i$  – энергии разделенных частей системы. Сделав перестановку и поделив обе части равенства (1) на  $c^2$ , а также замечая, что  $m = \varepsilon/c^2$  есть масса исходной системы, а  $m_i = \varepsilon_i/c^2$  – масса ее  $i$ -й составной части, получим

$$\varepsilon_{\text{св}}/c^2 = \sum_i m_i - m = \Delta m. \quad (4.6.2)$$

Величина  $\Delta m$  носит название дефекта массы. *Масса прочной (стабильной) системы меньше суммы масс составляющих ее систем на величину соответствующего дефекта массы. Чем меньше масса стабильного ядра по сравнению с суммой масс составляющих его нейтронов и протонов, тем больше его энергия связи и тем труднее данное ядро разрушить.*

Для атома водорода работа по "растаскиванию" протона и электрона

$$\varepsilon_{\text{св}} = \Delta mc^2 = (m_p + m_e - m_H)c^2 \approx 13,6 \text{ эВ}, \quad \frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-8}.$$

Такое же количество энергии выделится при образовании связанного состояния.

Для атомных ядер  $\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_A$ , где  $Z$  и  $N$  – число протонов и нейтронов в ядре,  $A = Z + N$  – число нуклонов. Абсолютное значение энергии связи на один нуклон (удельная энергия связи  $\Delta mc^2/A$ ) имеет максимум  $\approx 9$  МэВ при  $A \approx 56$  (железо).

Если же составное тело массы  $m$  нестабильно, т. е. может произвольно распадаться, то при распаде из состояния покоя

$$\varepsilon = mc^2 = \sum_i \varepsilon_i = \sum_i (m_i c^2 + K_i).$$

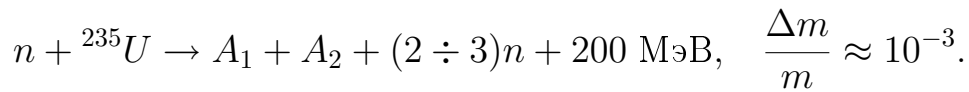
Так как  $K_i \geq 0$ , то распад возможен, если только  $\Delta m = \sum_i m_i - m < 0$ . В этом случае энергия связи отрицательна и равна  $\Delta m \cdot c^2 = -\sum_j K_j$  – суммарной кинетической энергии продуктов распада (*энерговыделению реакции*) с обратным знаком.

**Реакции деления.** Ядра тяжелых элементов делятся при бомбардировке нейтронами, протонами,  $\gamma$ -квантами и другими ядерными частицами (вынужденное деление) или самопроизвольно (спонтанное деление). Распад ядра на несколько (обычно два, редко больше) сравнимых по массе ядер сопровождается вылетом нейтронов и  $\gamma$ -лучей с выделением значительных количеств энергии.

Энергетическая неустойчивость тяжелых ядер по отношению к делению следует из того, что *дефект массы для них меньше дефекта ядер середины периодической системы*. Иначе, дефект массы таких ядер меньше дефекта масс ядер продуктов деления.

Чрезвычайно важным свойством обладают изотопы урана – способностью становиться нестабильными (т. е. самопроизвольно делиться) при захвате нейтронов. При этом энерговыделение реакции деления значительно превосходит кинетическую энергию захва-

ченного нейтрона. Это свойство определяет использование изотопов урана как атомного топлива (реакторы), а также взрывчатого вещества в атомном оружии. Пример реакции деления изотопа урана  $^{235}\text{U}$ :



**Реакции синтеза** – реакции слияния легких атомных ядер в более тяжелые. Так как ядра с наибольшей удельной энергией связи находятся в средней части Периодической системы элементов Менделеева, то термоядерные реакции являются процессами образования более плотно упакованных ядер (с большей удельной энергией связи) из более "рыхлых" и потому сопровождаются выделением энергии (точнее, выделением в продуктах реакции избыточной кинетической энергии, равной абсолютному увеличению полной энергии связи). Механизм слияния противоположен тому, который имеет место при делении ядер.

Реакции синтеза связаны с необходимостью сближения реагирующих ядер на расстояние порядка радиуса действия ядерных сил, чему мешают кулоновские силы отталкивания. Если кулоновский "барьер" каким-либо способом не ослабить, то реакции синтеза могут идти лишь при достаточно большой относительной энергии сталкивающихся ядер. Такие самоподдерживающиеся реакции возможны лишь при очень высоких температурах ( $\sim 10^7 \text{ }^\circ\text{C}$  и выше), отсюда и их название – термоядерные реакции.

Большое энерговыделение в ряде термоядерных реакций обусловило их особую роль и важность для астрофизики, ядерной и прикладной физики. Дополнительный аспект – их важная роль в дозвездных и звездных процессах синтеза ядер химических элементов.

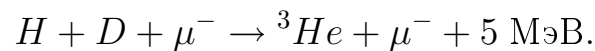
В качестве примера приведем реакцию слияния изотопов водорода дейтерия и трития, содержащих соответственно два и три нуклона, в изотопы гелия  ${}^4\text{He}$ :



К другому типу относятся реакции синтеза, которые становятся возможными в результате сильного искажения кулоновского барьера, так называемые реакции "холодного" синтеза. Это может произойти по двум причинам.

Первая – сильное "смятие" кулоновского барьера колоссальным давлением. Такие реакции могут идти только при огромных плотностях ( $\rho \gg 10^4$  г/см<sup>3</sup>) и реализуются пока лишь в некоторых звездах.

Вторая – вследствие прямого экранирования кулоновского поля. Эта интересная возможность ядерного синтеза при обычных плотностях и температурах возникает при захвате  $\mu^-$ -мезона на боровскую орбиту протона или дейтрона (ядро изотопа водорода дейтерия). Размеры образующегося при этом нейтрального *мезоатома* в  $m_\mu/m_e \simeq 212$  раз меньше размеров атома водорода, при этом кулоновское поле дейтрона или протона сильно экранируется, и мезоатом может сблизиться с другим дейтроном или протоном на расстояние, достаточное для реакции их слияния:



Здесь мюон играет роль катализатора. Это явление (мюонный, или мезонный катализ) не может привести к самоподдерживающейся реакции синтеза из-за малого времени жизни мюона ( $\sim 2 \cdot 10^{-6}$  с) и образования электрически заряженной системы при его возможном захвате возникающим ядром  ${}^3\text{He}$ . Однако расчеты показывают, что этот процесс может быть использован как промежуточный для энергетически достаточно эффективных технологий обогащения  ${}^{238}\text{U}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### I. Инвариантность и ковариантность физических соотношений и величин

Различные законы и соотношения в физике записываются в виде равенств. В эти равенства в виде переменных, определяемых по отношению к какой-либо системе отсчета, входят координаты, скорости, ускорения и время, а также функции от этих переменных. Для записи этих соотношений в какой-либо другой инерциальной системе отсчета, в них необходимо произвести замену "старых" переменных на "новые".

О соотношении, отражающем какой-либо физический закон или определенную связь между физическими величинами, говорят, что оно *инвариантно по отношению к определенным преобразованиям системы отсчета*, если равенство, выражающее это соотношение, удовлетворяет условиям:

– после выполнения преобразований, связанных с переходом к новой системе отсчета, структура равенства в "новых" переменных имеет совершенно такой же вид, какой она имела в "старых" переменных;

– все функции от переменных, которые содержатся в этом равенстве, не меняются, т. е. функции от "новых" переменных имеют совершенно такой же вид, какой они имели как функции "старых" переменных.

Инвариантность следует понимать как *свойство неизменности по отношению к некоторой совокупности изменений физических условий*. Свойством инвариантности могут обладать и различные физические и геометрические величины. В математическом смысле инвариантность означает неизменность по отношению к определенной группе преобразований. Например, если определять скорость частицы относительно системы отсчета, повернутой по сравнению с первоначальной, то значения проекций скорости будут иными, но сумма квадратов проекций скорости останется неизменной, неизмен-

ной останется поэтому и кинетическая энергия частицы, т. е. инвариантной относительно пространственных вращений системы отсчета. Величины напряженности электрических и магнитных полей, измеренные по отношению к инерциальным системам отсчета, движущимися относительно друг друга,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  не совпадают между собой, но, если преобразования координат и времени, связанные с переходом к другой системе отсчета, определяются преобразованиями Лоренца, то  $E^2 - H^2 = E'^2 - H'^2$ . Поэтому говорят, что величина  $E^2 - H^2$  инвариантна относительно преобразований Лоренца.

*Важность понятия инвариантности обусловлена тем, что с его помощью можно выделять величины, не зависящие от выбора системы отсчета, т. е. характеризующие внутренние свойства исследуемого объекта.*

В механике смысл утверждения о равноправности инерциальных систем состоит в следующем: все законы и уравнения механики, установленные для **замкнутых** (свободных от влияния других тел) систем, не изменяются при переходе к любой другой инерциальной системе отсчета, т. е. как функции "новых" переменных они имеют *точно такой же вид*, как и в "старых" переменных. Иными словами, для замкнутых систем имеет место *инвариантность* законов механики.

Если система *не является замкнутой*, то при переходе к другой инерциальной системе отсчета структура равенств, выражающих законы и уравнения механики, может меняться. Однако всегда можно придать данным равенствам такой вид, чтобы при таком переходе *структура* этих равенств сохранялась. Вид и содержание функций, содержащихся в данных равенствах, может меняться. В таких случаях говорят о *ковариантности* законов механики.

Утверждение о том, что законы механики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, содержит в себе по существу четыре утверждения.

1. Законы и уравнения механики замкнутых систем не изменяют-

ся при сдвигах систем отсчета, т. е. при преобразованиях вида

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c, \quad t' = t.$$

Это утверждение можно трактовать как "динамическое следствие" предположения об однородности пространства – если бы законы механики зависели от положения начала координат, то существовали бы динамические способы, позволяющие различать точки пространства друг от друга, выделить преимущественные точки.

2. Законы и уравнения механики замкнутых систем не изменяются при поворотах систем отсчета относительно любой из осей координат, например повороте вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha$ :

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Это утверждение – "динамическое следствие" предположения об изотропности пространства, так как если бы оно не было верно, то существовали бы динамические способы для различения одних направлений от других.

3. Законы и уравнения механики не изменяются при "сдвиге по оси времени", т. е. при преобразованиях вида

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + a.$$

Тем самым законы механики не устанавливают преимуществ для какого-либо выбора начала отсчета времени и согласуются с предположением об однородности времени.

4. Законы и уравнения механики не изменяются при преобразованиях, соответствующих равномерному поступательному движению системы отсчета.

Разумеется, законы механики не должны изменяться также при любой комбинации указанных выше преобразований, т. е. при выполнении их последовательно в любом порядке.

В нашем курсе мы сталкивались с двумя видами таких преобразований: с преобразованиями Галилея, в основе которых заложено



представление об абсолютном характере времени, и с преобразованиями Лоренца, отвечающих постулатам Эйнштейна. Преобразования Галилея и Лоренца и связанные с ними преобразования скоростей и ускорений по-разному определяют изменения переменных, входящих в уравнения и соотношения физики, при замене одной инерциальной системы на другую. Ясно, что какое-либо уравнение, ковариантное, например, к преобразованиям Галилея, уже не будет таковым по отношению к преобразованиям Лоренца. Например, уравнения динамики Ньютона ковариантны к преобразованиям Галилея, но нековариантны к преобразованиям Лоренца. Уравнения же электродинамики Максвелла, сформулированные в середине второй половины XIX в. и не претерпевшие с тех пор изменений, наоборот, ковариантны к преобразованиям Лоренца и не являются таковыми по отношению к преобразованиям Галилея. Преобразования Лоренца были получены еще до разработки Эйнштейном релятивистской механики именно как преобразования, обеспечивающие инвариантность уравнений электродинамики в вакууме.

В свое время теоретики были крайне озабочены этим обстоятельством. Попытки "усовершенствовать" уравнения Максвелла таким образом, чтобы они были ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея, приводили к выводам, противоречащим опытным данным. Ситуация разрешилась с созданием специальной теории относительности. Как уже упоминалось, преобразования Галилея оказались предельным случаем преобразований Лоренца, когда рассматриваемые скорости пренебрежительно малы по сравнению со скоростью света в вакууме.

Продемонстрируем сказанное на двух примерах нерелятивистской механики.

В качестве первого примера рассмотрим следующие уравнения<sup>5</sup>:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

---

<sup>5</sup> Это векторные уравнения движения *замкнутой системы* состоящей из двух притягивающихся или отталкивающихся точек.

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Видно, что преобразование любого из перечисленных выше четырех типов не меняет ни вида этих уравнений, ни вида функций  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  и  $F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ , содержащихся в правых частях. Результат преобразования получается просто заменой в исходных уравнениях "старых" переменных  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t$  на "новые"  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, t'$ .

В качестве примера *незамкнутой системы* рассмотрим движение системы, описываемой уравнением<sup>6</sup>

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (\alpha > 0)$$

Данное уравнение инвариантно относительно "сдвига по оси времени"

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad t' = t + a,$$

но при "сдвиге системы отсчета" ( $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}, \quad t' = t$ ) получится уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}'(\mathbf{r}'),$$

где

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}') = -\frac{\alpha}{(\mathbf{r}' - \mathbf{a})^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{a}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{a}|}.$$

Форма уравнения не изменилась, но  $\mathbf{F}'$  как функция переменной  $\mathbf{r}'$  отличается от  $\mathbf{F}$  как функции переменной  $\mathbf{r}$ , т. е. рассматриваемое уравнение движения представлено в форме, *ковариантной* относительно сдвигов. Отметим, что данное уравнение инвариантно относительно поворотов вокруг любой оси, но лишь ковариантно относительно преобразований Галилея.

---

<sup>6</sup> Уравнение описывает движение материальной точки, притягивающейся к центру, расположенному в начале координат системы, относительно которой описывается движение.

Независимость протекания физических процессов от выбора инерциальной системы отсчета математически проявляется в том, что *истинные уравнения, описывающие конкретный физический процесс, в различных инерциальных системах имеют одинаковый вид (ковариантны)*. Инвариантность, как это следует из вышеизложенного, является частным случаем ковариантности.

## II. Системы единиц. Формула размерности

Независимо от единиц измерения, используемых поставщиком или покупателем, производитель будет использовать свои собственные произвольные единицы измерения, переводимые в единицы поставщика или покупателя с помощью странных и неестественных коэффициентов пересчета.

Теорема Вышковского

Методы теории размерностей в сочетании с теорией подобия могут быть весьма эффективны в сложных вопросах, где полная теоретическая трактовка пока невозможна или весьма затруднительна. С привлечением добавочных соображений достаточно общего характера или данных эксперимента они могут, зачастую достаточно быстро и просто, привести к результатам, дающим важную (хотя и недостаточно полную) информацию о рассматриваемом круге явлений.

Понятие размерности возникает в связи с построением *систем единиц*. В принципе можно было бы для каждой физической величины установить свою единицу, не привязываясь как-либо к выбору единиц для других величин. Но тогда в уравнения физических формул и законов вошло бы множество численных коэффициентов, что сильно затруднило бы их восприятие и запоминание.

В естественных науках давно отказались от независимого выбора единиц для всех физических величин. Стали строить системы единиц по определенному принципу, который заключается в том, что некоторые физические величины принимаются за *основные или первичные*. Для таких величин единицы устанавливаются произвольно и независимо. Выбор основных единиц и их количество произволь-

ны. Это вопрос соглашения. В так называемой *международной системе единиц* (сокращенно СИ) за основные приняты шесть величин: длина, масса, время, температура, сила электрического тока и сила света (двумя дополнительными приняты безразмерные величины плоского и телесного углов).

Величины, не являющиеся основными, называются вторичными или производными. Для них единицы устанавливаются из требования, чтобы численные коэффициенты, входящие в физические соотношения, принимали определенные, заранее заданные значения.

Например, скорость  $v$  равномерного движения пропорциональна пройденному пути  $s$  и обратно пропорциональна затрачиваемому на это времени  $t$ . При независимом выборе единиц для  $v$ ,  $s$  и  $t$  в общем случае получаем  $v = Cs/t$ , где численное значение коэффициента определяется выбором единиц. Если же фиксировать значение коэффициента, то единицы  $v$ ,  $s$  и  $t$  перестанут быть независимыми: при произвольном установлении единиц для двух из этих величин третья становится величиной производной (для простоты значение  $C$  принимают равным единице).

Строя описанным образом какую-либо систему единиц, необходимо выполнить одно очень важное требование, заключающееся в том, *чтобы в одной и той же системе единиц количественные соотношения между различными физическими величинами выражались одними и теми же формулами, независимо от величины единиц основных физических величин*. Этим требованием определяется, как будет показано ниже, общий вид "формул размерности" физических величин.

Вторичные величины в различных физических процессах определяются не прямыми измерениями, а косвенно – по численным значениям определяющих первичных величин (например, скорость через расстояние и время).

*Уравнение, определяющее вторичную величину через первичные, называется определительным (или дефинитивным)*. Определи-

тельное уравнение имеет вид  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Показано, что *вторичная величина может определяться через первичные только выражениями типа*

$$y = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_m^{a_m}. \quad (II.1)$$

Здесь  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – постоянные числа. Из соотношения (1) видно, что существенным признаком вторичных величин являются показатели степени  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , которые называются *размерностью* вторичной величины в отношении первичной. Совокупность размерностей данной вторичной величины принято записывать в виде *формулы размерности*. Принята *символическая форма записи формулы размерности*, получаемая из (1) при замещении множителей преобразования величин их символами. При этом символ вторичной величины обычно берется в прямые скобки. Например, формула размерности для скорости записывается в виде  $[V] = LT^{-1}$ , где  $L$  – символ длины,  $T$  – символ времени.

Принимается, что размерность любой первичной величины в отношении себя равна единице, а в отношении других первичных величин – нулю. Формулы размерности должны содержать только первичные величины. Вторичные величины могут входить в качестве аргументов только в промежуточные символические выражения. Например, для силы  $[F] = M[A] = MLT^{-2}$ , где  $M$  – символ массы,  $A$  – символ ускорения ( $[A] = LT^{-2}$ ).

Например, надо найти зависимость скорости свободного падения от высоты. По своему содержанию задача типично механическая и должна рассматриваться в системе единиц, где первичными являются величины  $LT$ . Принимая ускорение свободного падения  $g$  постоянным, получаем, что искомая скорость может зависеть лишь от  $g$  и высоты  $h$ . Тогда

$$\begin{aligned} [v] = LT^{-1} &= [g]^\alpha [h]^\beta = [LT^{-2}]^\alpha [L]^\beta = L^{(\alpha+\beta)} T^{-2\alpha}, \rightarrow \\ &\rightarrow \alpha = \beta = 1/2, \rightarrow v = C\sqrt{gh}. \end{aligned}$$

Коэффициент  $C$  из теории размерностей найти нельзя.

*Во всяком физическом соотношении размерности обеих частей равенства должны быть одинаковы (правило размерности).* Это правило размерности очень полезно для проверки формул. Несовпадение размерностей означает наличие ошибки.

В зависимости от выбора основных величин, а также от вида определительных уравнений, одна и та же физическая величина получает в разных системах единиц не только разные численные значения, но и различные размерности. В то же время разные физические величины могут иметь одинаковые размерности в одной и той же системе единиц. Примерами могут служить работа и энергия (в СИ), емкость и самоиндукция в так называемой гауссовой системе единиц. Одинаковая размерность двух физических величин в какой-либо системе единиц говорит не об их тождестве, а только о том, что в рассматриваемой системе единиц масштабы этих величин меняются одинаково при изменении масштабов основных физических величин. В других системах единиц размерности тех же физических величин могут и не совпадать.

Здесь нет какого-либо логического противоречия. Самой по себе физической величине не свойственна никакая размерность. Последняя появляется лишь после установления той или иной системы единиц. Вопрос об "истинной" размерности физической величины, по меткому замечанию М. Планка, имеет не более смысла, чем вопрос об "истинном" названии какого-либо предмета.

Правилом размерностей иногда полезно воспользоваться при решении трудных задач, чтобы представить вид зависимостей искомых величин от других (заданных, предполагаемых) физических величин. Это правило также необходимо при обработке экспериментальных данных, когда экспериментально определяются зависимости между определенными физическими величинами.

Рассмотрим пример. Оценить период ( $T$ ) возможных колебаний капли жидкости плотности  $\rho$ , радиуса  $R$ , при коэффициенте поверх-

ностного натяжения  $\sigma$ .

Естественно выбрать систему первичных величин  $MLT$ . Существенными для процесса являются величины  $T$ ,  $\rho$ ,  $R$  и  $\sigma$ . Тогда

$$[T] = [\rho]^{a_1} [\sigma]^{a_2} [R]^{a_3}; \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [\sigma] = MT^{-2}, \quad [R] = L.$$

Получаем

$$a_1 = 1/2, \quad a_2 = -1/2, \quad a_3 = 3/2, \quad \rightarrow \quad T \sim (\rho R^3 / \sigma)^{1/2}.$$

*Задача.* Каково ускорение силы тяжести, первая и вторая космические скорости для планеты, масса которой в  $\beta$  раз, а радиус в  $\alpha$  раз меньше земных?

Ответ: ускорение силы тяжести на планете  $g_p = \beta\alpha^{-2}$ , а космические скорости в  $\delta = \sqrt{\beta/\alpha}$  раз меньше земных.

Далее приведены задачи из книги *Смит Дж.* Математические идеи в биологии. М.: Мир, 1970.

*Задача.* Как зависит от размеров животного максимальное время, которое животное может бежать без воды?

Запас воды пропорционален объему тела, т. е.  $L^3$ , потеря влаги – пропорциональна площади поверхности, т. е.  $L^2$ . Максимальное время пробега без воды пропорционально  $L$ .

*Задача.* Как зависит скорость бега по ровному месту и в гору от размеров животного? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости и площади поперечного сечения.

Сила мышц пропорциональна  $L^2$  (так как прочность костей пропорциональна площади их сечения). К.п.д. мышц примерно постоянен – около 25 %, остальные 75 % химической энергии переходят в тепло; теплоотдача пропорциональна поверхности тела, т. е.  $L^2$ . Значит и полезная мощность пропорциональна  $L^2$ . Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна квадрату скорости и площади поперечного сечения; затрачиваемая на ее преодоление мощность поэтому пропорциональна  $v^2 L^2 v = v^3 L^2$ . Таким образом,  $v^3 L^2 \sim L^2$ , следовательно,  $v \sim L^0$ . Действительно, у животных, не мельче зайца

и не крупнее лошади, скорость бега по ровному месту практически не зависит от размеров особи.

Для бега в гору необходима мощность  $\sim mgv \sim L^3v$ , и так как развиваемая мощность  $\sim L^2$ , то находим  $v \sim L^{-1}$ . Собака, например, легко взбегают на холм, тогда как лошадь замедляет шаг.

*Задача.* Как зависит от размеров животного высота прыжка?

Энергия, необходимая для прыжка на высоту  $h$  пропорциональна  $L^3h$ , а совершаемая силой мышц работа пропорциональна  $FL \sim L^2L$ . Итак,  $L^3h \sim L^3$ , т. е. высота прыжка не зависит от размеров животного. Кенгуру и тушканчик (и блоха! - Л.Л.) прыгают примерно на одинаковую высоту.



# Оглавление

<i>ПРЕДИСЛОВИЕ</i> . . . . .	1
<b>1 КИНЕМАТИКА</b>	<b>2</b>
<b>ЛЕКЦИЯ 1</b> . . . . .	2
1.1. Пространственные координаты и время. Системы отсчета . . . . .	2
1.2. Скорость, ускорение, криволинейное движение . . . . .	7
<b>ЛЕКЦИЯ 2</b> . . . . .	12
1.3. Инерциальные системы. Принцип относительности. Преобразования Галилея . . . . .	12
<b>2 НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ</b>	<b>19</b>
2.1. Законы динамики Ньютона . . . . .	19
2.2. Взаимодействие на расстоянии. Полевое взаимодействие	22
2.3. Импульс. Сила как мера скорости изменения импульса. . . . .	23
<b>ЛЕКЦИЯ 4</b> . . . . .	27
2.4. Центр инерции и его свойства . . . . .	27
2.5. Моменты импульса и силы. Изменение момента им- пульса . . . . .	29
<b>ЛЕКЦИЯ 5</b> . . . . .	34
2.6. Работа. Кинетическая энергия. Потенциальные силы. Потенциальная энергия . . . . .	34
2.7. Механическая энергия системы. Изменение и сохранение . . . . .	39

<b>3</b>	<b>ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАКОНОВ И ТЕОРЕМ МЕХАНИКИ</b>	<b>44</b>
	<b>ЛЕКЦИЯ 6</b> . . . . .	44
	3.1. Динамика твердого тела . . . . .	45
	<b>ЛЕКЦИЯ 7</b> . . . . .	53
	3.2. Движение в центральном поле . . . . .	53
	3.3. Движение в кулоновских полях (задача Кеплера) . . . . .	57
	<b>ЛЕКЦИЯ 8</b> . . . . .	62
	3.4. Распады и столкновения . . . . .	62
	<b>ЛЕКЦИЯ 9</b> . . . . .	67
	3.5. Малые колебания . . . . .	67
<b>4</b>	<b>РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА</b>	<b>76</b>
	<b>ЛЕКЦИЯ 10</b> . . . . .	76
	4.1. Постулаты Эйнштейна. Первые следствия . . . . .	76
	4.2. Преобразования Лоренца. Релятивистские преобразо- вания скорости. Интервал. 4-векторы . . . . .	84
	<b>ЛЕКЦИЯ 11</b> . . . . .	92
	4.3. Релятивистские энергия и импульс . . . . .	92
	4.4. Фотон. Аберрация света, Эффект Доплера . . . . .	95
	<b>ЛЕКЦИЯ 12</b> . . . . .	99
	4.5. Распады и соударения в релятивистской механике. Эффект Комптона. Метод встречных пучков . . . . .	99
	<b>ЛЕКЦИЯ 13</b> . . . . .	105
	4.6. Энергия связи. Реакции деления и синтеза атомных ядер . . . . .	105
	<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b> . . . . .	109
	I. Инвариантность и ковариантность физических соот- ношений и величин. . . . .	109
	II. Системы единиц. Формула размерности . . . . .	114